

MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

Diplomarbeit

Alternierende Faktorgruppen Fuchscher Dreiecksgruppen

Patrick Reichert

Betreuer und Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. G. Stroth
Institut für Algebra und Geometrie
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Theodor Lieser Str. 5
06099 Halle/Saale

Prof. J. Wolfart
Fachbereich Mathematik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Robert-Mayer-Str. 6–10
Postfach 11 19 32
60054 Frankfurt am Main

Eingereicht am 02. Dezember 2003

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Patrick Reichert, dass die Diplomarbeit *Alternierende Faktorgruppen Fuchscher Dreiecksgruppen* von mir selbst ohne andere als die darin angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt worden ist. Wörtlich und inhaltlich übernommene Stellen wurden als solche gekennzeichnet.

Halle, den 02.12.2003

Patrick Reichert

Vorwort

Diese Diplomarbeit behandelt eine Fragestellung aus einem Arbeitsgebiet, das erst in den letzten zwanzig Jahren entstanden ist und Querverbindungen zwischen Begriffen wie *Uniformisierungstheorie*, *Fuchssche Gruppen*, *Riemannsche Flächen*, *Grothendiecks Dessins d'enfants* (Kinderzeichnungen), *Teichmüllerräume* und sogar *Inverse Galoistheorie* herstellt.

Herausgegriffen wurde ein Problem, für welches Prof. J. Wolfart von der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/M. vor etwa zwei Jahren meine Aufmerksamkeit weckte. Es sollte die Fragestellung untersucht werden, welche Fuchsschen Dreiecksgruppen alternierende Faktorgruppen besitzen.

Dabei stellte sich recht schnell heraus, dass die Untersuchungen in der Literatur zu dieser Fragestellung bisher vor allem Existenzaussagen lieferten, die für jede Fuchssche Gruppe beispielsweise die Existenz einer Schranke N garantieren, so dass für alle $n > N$ stets ein Epimorphismus in die alternierende Gruppe A_n existiert.

Ganz außer Acht gelassen wurden dabei meist kleine Beispiele und weiterführende Fragestellungen dazu. In dieser Diplomarbeit werden Methoden entwickelt, die es erlauben, in Fuchsschen Dreiecksgruppen effizient zu rechnen. Weiterhin wird am Beispiel einer konkreten Dreiecksgruppe gezeigt, wie entschieden werden kann, ob die Kerne von Epimorphismen in dieselbe alternierende Gruppe in der Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Diese Aufgabenstellung korrespondiert also mit dem Wunsch, zueinander nicht isomorphe Riemannsche Flächen mit derselben alternierenden Automorphismengruppe zu finden, die einen vorgegebenen Verzweigungstyp besitzen.

Im ersten Kapitel wird eine Einführung in diese Fragestellungen gegeben, außerdem ist eine ausführliche Literatursicht angefügt. Das zweite Kapitel zeigt allgemeine Eigenschaften der alternierenden Gruppen auf, die anschließend zur Entwicklung von Methoden verwendet werden, alternierende Faktorgruppen für eine vorgegebene Dreiecksgruppe zu finden. Zur Erarbeitung des Abschnitts über die *Genus formula* möchte ich besonders Marston Conder (New Zealand Institute of Mathematics and its Applications, Neuseeland), Robert Guralnick (University of Southern California, USA) und Wilson Stothers (University of Glasgow, GB) danken, die mir mit Hinweisen zu Beweisideen zur Seite standen.

Das dritte Kapitel ist das umfangreichste. Es wird eine Darstellung von Dreiecksgruppenelementen hergeleitet, die es ermöglicht, effizient Berechnungen auf dem Computer durchführen zu können. Im vierten Kapitel wird das Hauptresultat dieser Ausarbeitung bewiesen. Es wird die Existenz von zwei zueinander nicht isomorphen Riemannschen Flächen gezeigt, die beide mit Hilfe von Normalteilern der $(3, 5, 5)$ -Dreiecksgruppe erzeugt werden und dieselbe Automorphismengruppe A_5 besitzen.

Während der zweijährigen Bearbeitung dieser Fragestellungen gab es per E-Mail mehrere Kontaktaufnahmen mit Autoren der verwendeten Literatur. Besonders bedanken möchte ich mich für die ausführlichen Erklärungen bei David Singerman (University of Southampton, GB), Maria Chiara Tamburini (Catholic University Brescia, Italien), Brent Everitt (University of York, GB), Wilson Stothers (University of Glasgow, GB) und Robin Hartshorne (University of California, Berkeley, USA). Für seine Hilfsbereitschaft bei der Lösung meiner GAP-Probleme danke ich Alexander Hulpke (Colorado State University, USA).

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen beiden Betreuern, Herrn Prof. G. Stroth, und Herrn Prof. J. Wolfart, die stets bemüht waren, meine Lösungsansätze kritisch zu prüfen und immer eine hilfreiche Idee anbieten konnten.

Einen besonderen Dank möchte ich meiner Frau Alena aussprechen. Ohne ihre Unterstützung und ihr Verständnis hätte ich diese Ausarbeitung nicht in der vorliegenden Form erstellen können.

Halle, im Dezember 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Faktorgruppen Fuchsscher Gruppen	3
1.2	Ergebnisse in der Literatur	4
2	Alternierende Faktorgruppen	8
2.1	Eigenschaften der alternierenden Gruppen	8
2.2	Untergruppenketten	11
2.3	Die Genus formula	13
2.4	Die Genus formula als Transitivitätskriterium	17
2.5	Computergestützte Suche nach alternierenden Faktorgruppen	18
3	Dreiecksgruppen als Transformationsgruppen der hyperbolischen Ebene	21
3.1	Hyperbolische Geometrie	21
3.2	Fuchssche Gruppen	24
3.3	Definition und Konstruktion von Dreiecksgruppen	26
3.4	Darstellung von Dreiecksgruppen	31
3.5	Quaternionen-Algebren	39
3.6	Anwendung der effizienten Rechenmethoden	49
3.7	Konjugiertheitsbetrachtungen	52
4	Arithmetische Dreiecksgruppen	58
4.1	Konstruktion arithmetischer Dreiecksgruppen	58
4.2	Der nicht-arithmetische Fall	64
4.3	Der arithmetische Fall	65

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Fragestellungen der Diplomarbeit gegeben. Obwohl zum tiefen Verständnis der Bedeutung der Untersuchungen eine Vielzahl an Begriffsbildungen notwendig ist, wird hier ein Einblick gewährt.

Dies impliziert, dass ausgewählte Definitionen späterer Kapitel unmotiviert vorweggenommen werden. Mir schien dieser Zugang aber der eingängigste zu sein. Auch wird ein kurzer historischer Abriss der bisher erzielten Ergebnisse, auf die sich diese Ausarbeitung stützt, präsentiert.

1.1 Faktorgruppen Fuchsscher Gruppen

Diese Einleitung basiert maßgeblich auf [Con01] und [Bea83]. Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die mit einer komplexen analytischen Struktur (*Atlas* genannt) versehen ist. Ein *Automorphismus* einer Riemannschen Fläche X ist ein *Homöomorphismus* $f: X \mapsto X$, der die lokale analytische Struktur beibehält. Wie üblich bilden die Automorphismen von X bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *Automorphismengruppe* $\text{Aut } X$.

Eine Riemannsche Fläche kann mit dem *Bahnenraum* \mathcal{H}^2/Λ der Operation eines Normalteilers Λ identifiziert werden, der mit endlichem Index in einer *diskreten* Untergruppe Γ von $PSL(2, \mathbb{R})$ enthalten ist, die auf der oberen komplexen Halbebene \mathcal{H}^2 operiert. Die obere komplexe Halbebene wird dabei als Modell für die hyperbolische Ebene angesehen. Die Faktorgruppe Γ/Λ ist dann isomorph zu der Automorphismengruppe $\text{Aut } X$.

Verbunden mit der Operation der diskreten Gruppe Γ auf \mathcal{H}^2 ist der *Fundamentbereich* $F = F(\Gamma)$. Dies ist eine abgeschlossene Menge, deren Bilder unter Γ bis auf Randpunkte disjunkte Durchschnitte besitzen und \mathcal{H}^2 vollständig überdecken.

Ist die Riemannsche Fläche $X = \mathcal{H}^2/\Lambda$ kompakt, so besitzt der Fundamentbereich von Γ nur endlich viele Seiten. In diesem Fall existiert eine Darstellung von Γ der Form

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_e, a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma \mid x_1^{m_1} = \dots = x_e^{m_e} = 1, \prod_{i=1}^e x_i \prod_{j=1}^\gamma [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

mit den *elliptischen* Erzeugern x_1, x_2, \dots, x_e und den *hyperbolischen* Erzeugern $a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma$, dabei heißt γ *Geschlecht* von Γ . Solch eine diskrete Gruppe heißt *Fuchssche Gruppe* mit der *Signatur* $(\gamma; m_1, \dots, m_e)$, $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_e$. Die Exponenten m_i sind dabei die Ordnungen der *Verzweigungspunkte* von X .

Der hyperbolische Flächeninhalt $\mu(F)$ des Fundamentbereiches $F = F(\Gamma)$ berechnet sich nach der Vorschrift

$$\mu(F) = 2\pi \left(2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^e \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right).$$

Die wohlbekanntete *Riemann-Hurwitz-Formel* sagt

$$|\Gamma/\Lambda| = \frac{2\pi(2g-2)}{\mu(F)}$$

aus, wobei g das *topologische Geschlecht* der Riemannschen Fläche X ist. Insgesamt erhält man daraus den oft verwendeten Zusammenhang

$$2g - 2 = |\text{Aut } X| \left[2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^e \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right].$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern besitzt als kleinsten positiven Wert die Zahl $\frac{1}{42}$, der genau für $\gamma = 0$, $r = 3$ und $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2, 3, 7\}$ angenommen wird. Dies führt zu der folgenden Aussage.

Theorem 1.1 (Hurwitz, 1893) *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom topologischen Geschlecht $g > 1$, dann ist $|\text{Aut } X| \leq 84(g - 1)$. Weiterhin wird diese obere Schranke für die Anzahl der Automorphismen genau dann angenommen, wenn $\text{Aut } X$ ein homomorphes Bild der $(2, 3, 7)$ -Dreiecksgruppe*

$$\Delta(2, 3, 7) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^7 = xyz = 1 \rangle$$

ist.

Wegen dieses Ergebnisses werden alle nicht-trivialen endlichen Faktorgruppen der $(2,3,7)$ -Dreiecksgruppe als *Hurwitz-Gruppen* bezeichnet. Davon ausgehend kann man allgemein Dreiecksgruppen als die folgende Teilmenge der Fuchsschen Gruppen definieren.

Definition 1.2 Eine **Dreiecksgruppe** ist eine Fuchssche Gruppe mit Signatur $(0; m_1, m_2, m_3)$; sie besitzt also eine Präsentation der Form

$$\langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle,$$

wobei die Exponenten die Bedingung ¹

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$$

erfüllen. Als Bezeichnung wird im folgenden $\Delta(m_1, m_2, m_3)$, $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$, verwendet.

Bemerkung 1.3 Wegen $xyz = 1 \Rightarrow z = y^{-1}x^{-1}$ lässt sich die Relation $z^{m_3} = 1$ schreiben als $(y^{-1}x^{-1})^{m_3} = 1$ bzw. $(xy)^{m_3} = 1$. Somit kann man die reduzierte Präsentation

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) = \langle x, y \mid x^{m_1} = y^{m_2} = (xy)^{m_3} = 1 \rangle$$

für Dreiecksgruppen verwenden.

In dieser Diplomarbeit soll die folgende Fragestellung untersucht werden:

Wann tritt A_n als homomorphes Bild von Dreiecksgruppen auf?

Diese Frage lässt sich auch anders formulieren:

Welche alternierenden Gruppen lassen sich von zwei Elementen x, y erzeugen, die die Relationen $x^{m_1} = y^{m_2} = (xy)^{m_3} = 1$ für vorgegebene Exponenten m_1, m_2 und m_3 erfüllen?

Nach den obigen Ausführungen ist dies äquivalent zur Suche nach kompakten Riemannschen Flächen, deren Automorphismengruppe eine alternierende Gruppe ist. Hierbei soll es nicht unbedingt darum gehen, diese Flächen zu berechnen, sondern vielmehr nur darum, ihre Existenz und Eigenschaften anzugeben. Nach [Wol01] ist es in der Regel aussichtslos, für eine Fläche vom Geschlecht $g > 1$ die Überlagerungsgruppe Λ etwa durch präzise Angabe ihrer Erzeugenden in Form von Matrizen angeben zu wollen oder umgekehrt für eine in Matrixform gegebene Fuchssche Gruppe Λ ein Modell für die Riemannsche Fläche \mathcal{H}^2/Λ in Form von definierenden Gleichungen zu bestimmen.

Werden Epimorphismen gefunden, die eine Dreiecksgruppe auf eine alternierende Gruppe abbilden, so ist sofort interessant, wie viele *wesentlich verschiedene* es gibt. Wesentlich verschieden heißen dabei zwei Epimorphismen, die nicht durch Nachschalten eines Automorphismus der alternierenden Gruppe auseinander hervorgehen. Nur in diesem Fall sind die Kerne der Epimorphismen voneinander verschieden. Ob die zugehörigen Riemannschen Flächen zueinander isomorph sind, hängt davon ab, ob die Kerne in der Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Die Frage der Konjugiertheit ist also der Schlüssel dazu, wie viele nicht-isomorphe Riemannsche Flächen mit vorgegebener Automorphismengruppe A_n und festgelegtem *Verzweigungstyp* existieren.

1.2 Ergebnisse in der Literatur

Die ersten Untersuchungen, welche Eigenschaften Erzeuger von alternierenden Gruppen besitzen müssen, wurden von G. A. Miller durchgeführt. Er publizierte 1901 folgendes Resultat:

Theorem 1.4 (Miller [Mil01]) Jede alternierende Gruppe mit der Ausnahme von A_3, A_6, A_7, A_8 und jede symmetrische Gruppe mit der Ausnahme von S_5, S_6 und S_8 kann von zwei Elementen x, y mit $x^2 = y^3 = 1$ erzeugt werden.

Somit war gezeigt, dass bis auf vier Ausnahmen alle alternierenden Gruppen Faktorgruppen der modularen Gruppe $\Gamma = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1 \rangle$ sind.

Seit den klassischen Arbeiten von A. Hurwitz über die Automorphismen von kompakten Riemannschen Flächen sind die $\Delta(2, 3, 7)$ -Dreiecksgruppe, ihre Faktor- und Untergruppen von großem Interesse. A. M. Macbeath erzielte folgendes Resultat.

¹Diese Bedingung folgt aus der Voraussetzung, dass die zugrundeliegende Geometrie hyperbolisch ist und der Flächeninhalt des Fundamentalbereiches positiv sein muss.

Theorem 1.5 (Macbeath [Mac69]) Die $PSL(2, q)$ ist genau dann eine Hurwitz-Gruppe, falls

- (i) $q = 7$ oder
- (ii) $q = p$ für eine Primzahl p mit $p \equiv \pm 1 \pmod{7}$ oder
- (iii) $q = p^3$ für eine Primzahl p mit $p \equiv \pm 2$ oder $p \equiv \pm 3 \pmod{7}$ gilt.

Zur Untersuchung der Untergruppenstruktur der unendlichen Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ ist die Genus formula als notwendiges Kriterium seit langem bekannt.

Lemma 1.6 (Genus formula) Damit die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ eine Untergruppe vom Index n besitzt (oder eine transitive Permutationsdarstellung vom Grad n), müssen natürliche Zahlen d , e , f und g existieren mit

$$n = 84(d - 1) + 21e + 28f + 36g.$$

W.W. Stothers untersuchte die Untergruppen von $\Delta(2, 3, 7)$ und erhielt das bemerkenswerte Resultat, dass die Genus formula bis auf drei Ausnahmen auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Untergruppe darstellt.

Theorem 1.7 (Stothers [Sto77]) Als **Spezifikation** wird im folgenden ein 5-Tupel (n, d, e, f, g) von nichtnegativen ganzen Zahlen bezeichnet, welches $n = 84(d - 1) + 21e + 28f + 36g$ erfüllt.

Jede Untergruppe $U \leq \Delta(2, 3, 7)$ mit Index n besitzt einen Fundamentalbereich mit e (bzw. f , g) nichtäquivalenten elliptischen Ecken der Ordnung 2 (bzw. 3, 7), und die korrespondierende Riemannsche Fläche besitzt das Geschlecht d , welches durch die Genus formula festgelegt ist. Als **Spezifikation einer Untergruppe** von $\Delta(2, 3, 7)$ sei das 5-Tupel (n, d, e, f, g) bezeichnet.

Mit Ausnahme der drei Tupel $(16, 0, 0, 1, 2)$, $(21, 1, 1, 0, 0)$ und $(36, 1, 0, 0, 1)$ gibt es für jede Spezifikation eine Untergruppe von $\Delta(2, 3, 7)$ mit dieser Spezifikation.

Ende der sechziger Jahre stellte Graham Higman die Vermutung auf, dass jede Fuchssche Gruppe unter ihren homomorphen Bildern fast alle alternierenden oder symmetrischen Gruppen besitzt. Fast alle soll hier stets im Sinne von *alle bis auf eine endliche Anzahl von Ausnahmen* bedeuten.

Er entwickelte im weiteren eine Methode, diese Vermutung für die Gruppe $\Delta(2, 3, 7)$ beweisen zu können, die auf der Konstruktion einer unendlichen Familie von Nebenklassengraphen basierte. Es gab jedoch nie eine Veröffentlichung seiner damals völlig neuartigen Gedanken. Erst sein Schüler M.D.E. Conder griff seine Methode auf und konnte damit das folgende Resultat erzielen.

Theorem 1.8 (Conder [Con80]) Für $n > 167$ ist die alternierende Gruppe A_n eine Hurwitz-Gruppe.

In den nachfolgenden Jahren verallgemeinerte er seine Resultate auf weitere Dreiecksgruppen.

Theorem 1.9 (Conder [Con81])

- (i) Für jedes feste $k \geq 7$ sind fast alle alternierenden Gruppen A_n Faktorgruppen von $\Delta(2, 3, k)$.
- (ii) Bis auf endlich viele Ausnahmen kann jede alternierende Gruppe von zwei Elementen u, v mit $u^2 = v^k = 1$ erzeugt werden.

Theorem 1.10 (Conder [Con88])

- (i) Für fast alle positiven ganzen Zahlen n treten sowohl A_n als auch S_n als homomorphe Bilder der Gruppe $G^{6,6,6} = \langle A, B, C \mid A^6 = B^6 = C^6 = (AB)^2 = (BC)^2 = (CA)^2 = (ABC)^2 = 1 \rangle$ auf.
- (ii) Für fast alle positiven ganzen Zahlen n ist sowohl A_n als auch S_n eine Faktorgruppe von $\Delta(2, 6, 6) = \langle u, v \mid u^2 = v^6 = (uv)^6 = 1 \rangle$.

Qaiser Mushtaq erweitert diese Ergebnisse zusammen mit Gian-Carlo Rota und Herman Servatius auf größere Familien von Dreiecksgruppen.

Theorem 1.11 (Mushtaq, Rota [MR92]) Für fast alle natürlichen Zahlen n ist A_n homomorphes Bild von $\Delta(2, k, l)$ mit geradem k , $k \geq 6$ und $l \geq 5k - 3$.

Theorem 1.12 (Mushtaq, Servatius [MS93]) *Als erweiterte Dreiecksgruppe sei*

$$\begin{aligned}\Delta^*(2, p, q) &= \langle x, y, t \mid x^2 = y^p = (xy)^q = t^2 = (xt)^2 = (yt)^2 = 1 \rangle \\ &= \langle x, y \mid x^2 = y^p = (xy)^q = 1 \rangle \times \langle t \mid t^2 = 1 \rangle \\ \Delta^*(2, p, q) &= \Delta(2, p, q) \times \langle t \mid t^2 = 1 \rangle\end{aligned}$$

bezeichnet, dann gilt

- (i) Für $q > 57$ ist entweder A_n oder S_n homomorphes Bild von $\Delta^*(2, 5, q)$ für alle $n > 4 \cdot 57 \cdot 58$.
- (ii) Ist p Primzahl, $p \geq 7$, $q > 3p + 2$, so ist entweder A_n oder S_n homomorphes Bild von $\Delta^*(2, p, q)$ für alle $n > 2q(2q + 1)$.
- (iii) Ist p Primzahl, $25 \leq p \leq q$, so ist entweder A_n oder S_n homomorphes Bild von $\Delta^*(2, p, q)$ für alle $n > [2q - 16][(2q + 1) - 16]$.

Nachdem M.D.E. Conder seit Ende der siebziger Jahre die Ideen Higmans weiterentwickelt hatte, griff Conders Schüler Brent Everitt die ursprüngliche Fragestellung von Graham Higman erneut auf und konnte im Laufe der neunziger Jahre die folgenden Ergebnisse erzielen.

Theorem 1.13 (Everitt [Eve94]) *Für alle $r \geq 6$ sind fast alle alternierenden Gruppen A_n Faktorgruppen von $\Delta(2, 4, r)$.*

Theorem 1.14 (Everitt [Eve97]) *Eine Gruppe mit endlicher Präsentation besitze die Eigenschaft \mathcal{H} , falls eine natürliche Zahl $N > 1$ existiert, sodass entweder A_n oder S_n homomorphe Bilder von G für alle $n > N$ sind. Dann gilt*

- (i) Für $r \geq 40$ besitzt die Gruppe $\Delta(3, 5, r)$ die Eigenschaft \mathcal{H} .
- (ii) Für jede Primzahl $q \geq 7$ und jede Zahl $r \geq 4q$ besitzt die Gruppe $\Delta(3, q, r)$ die Eigenschaft \mathcal{H} .

Im Jahr 2000 gelingt ihm sogar der vollständige Beweis der über 30 Jahren bestehenden Vermutung Higmans.

Theorem 1.15 (Everitt [Eve00]) *Jede Fuchssche Gruppe besitzt unter ihren homomorphen Bildern fast alle alternierenden Gruppen.*

Er gibt sogar eine Berechnungsvorschrift an, mit der man für eine vorgegebene Fuchssche Gruppe eine Schranke N bestimmen kann, sodass für alle $n \geq N$ die alternierende Gruppe A_n homomorphes Bild der Fuchsschen Gruppe ist. Als einziger Wermutstropfen sei hier genannt, dass die Schranke N im allgemeinen sehr groß und in den seltensten Fällen scharf ist.

Alle hier genannten Publikationen nutzen ausschließlich die Eigenschaften der alternierenden Gruppen und der Nebenklassengraphen Fuchsscher Gruppen aus und beziehen die Ergebnisse nicht auf Automorphismengruppen Riemannscher Flächen.

Prof. J. Wolfart und Manfred Streit gehen in [SW00] einen Schritt weiter, allerdings werden nicht Epimorphismen in alternierende Gruppen, sondern in semidirekte Produkte multiplikativer zyklischer Gruppen der Form

$$G \cong Z_p \rtimes Z_q,$$

betrachtet, wobei $p, q > 3$ Primzahlen sind, die die Bedingungen $q \neq 7$ und $p \equiv 1 \pmod{q}$ erfüllen. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Z_q auf dem Normalteiler Z_p durch

$$b^{-1}ab = a^u$$

operiert, wobei a bzw. b Erzeuger von Z_p bzw. Z_q und u eine feste prime Restklasse der Ordnung q in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ist. Folgendes Resultat haben die Autoren erzielt.

Theorem 1.16 (Streit, Wolfart [SW00])

1. Es gibt $q - 1$ verschiedene Normalteiler N_s der Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, q)$, $s \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ mit Faktorgruppe

$$\Delta(p, q, q)/N_s \cong G.$$

Unter diesen Normalteilern N_s gibt es $(p - 1)/2$ Konjugiertheitsklassen in $PSL(2, \mathbb{R})$.

2. Es gibt $(q-1)(q-2)$ verschiedene Normalteiler $N_{n,t,v}$ der Dreiecksgruppe $\Delta(q, q, q)$ mit Faktorgruppe

$$\Delta(q, q, q)/N_{n,t,v} \cong G,$$

wobei die Indizes $n, t, v \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ die Bedingung

$$n + t + v \equiv 0 \pmod{q}$$

erfüllen. Zwei Normalteiler $N_{n,t,v}$ und $N_{m,s,w}$ sind genau dann $PSL(2, \mathbb{R})$ -konjugiert zueinander, falls (n, t, v) eine Permutation von (m, s, w) ist. Es gibt $q-1$ Konjugiertheitsklassen von Gruppen der Form $N_{n,t,t}$ und $(q-1)(q-5)/6$ Konjugiertheitsklassen der Normalteiler $N_{n,t,v}$ mit paarweise verschiedenen Indizes.

2 Alternierende Faktorgruppen

In diesem Kapitel werden mit gruppentheoretischen Begriffsbildungen allgemeine Eigenschaften der alternierenden Gruppen aufgezeigt, die später dazu benutzt werden können, alternierende Faktorgruppen vorgegebener Dreiecksgruppen zu finden.

Zurückgeführt wird die Suche nach Epimorphismen in eine Gruppe A_n zuerst auf die Suche nach einer Untergruppe vom Index $\frac{n!}{2}$ und dann sogar auf eine Untergruppe vom Index n mit speziellen Eigenschaften. Da generell Algorithmen für die Aufzählung von Untergruppen von unendlichen Gruppen, die nur durch Erzeuger und Relationen gegeben sind, umso schneller ablaufen, je kleiner der Index der zu findenden Untergruppe ist, kann man beim Übergang von $\frac{n!}{2}$ zu n erhebliche Geschwindigkeitsvorteile verzeichnen.

Mit Hilfe von Schlussfolgerungen aus der sogenannten *Genus formula* (Geschlechtsformel) wird es möglich, für eine vorgegebene Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ mit Primzahlen p, q, r natürliche Zahlen n zu ermitteln, für die es keinen Epimorphismus $\Delta(p, q, r) \mapsto A_n$ gibt, ohne auf einen Algorithmus angewiesen zu sein, der Untergruppen aufzählt.

Am Ende dieses Kapitels wird aufgezeigt, wie die vom gruppentheoretischen Computeralgebra-Programm GAP zur Verfügung gestellten Algorithmen dazu benutzt werden können, alternierende Faktorgruppen von Dreiecksgruppen effizient zu finden.

2.1 Eigenschaften der alternierenden Gruppen

Zunächst erfolgt eine Definition der gruppentheoretischen Grundbegriffe. In diesem Zusammenhang werden auch gleich die verwendeten Notationen aufgezeigt.

Definition 2.1 Sei G eine Gruppe und Ω eine Menge. Dann **operiert** G auf Ω , falls jedem Paar $(\omega, g) \in \Omega \times G$ genau ein Element $\omega^g \in \Omega$ zugeordnet ist, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\omega^1 = \omega$ für $1 = 1_G$ und alle $\omega \in \Omega$,
- (ii) $(\omega^x)^y = \omega^{xy}$ für alle $x, y \in G$ und alle $\omega \in \Omega$.

Die Operation heißt **treu**, falls nur das Einselement von G alle Elemente aus Ω festlässt. Eine treue Operation wird auch als **Permutationsdarstellung** bezeichnet.

Die Operation heißt **transitiv**, falls für je zwei Elemente $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ein $g \in G$ mit $\omega_1^g = \omega_2$ existiert.

Eine nichtleere Teilmenge $\Delta \subseteq \Omega$ heißt **Block** oder **Imprimitivitätsgebiet**, falls für alle $g \in G$ gilt:

$$\Delta^g \neq \Delta \Rightarrow \Delta^g \cap \Delta = \emptyset.$$

Die Operation heißt **primitiv**, falls kein Block Δ mit $1 \neq |\Delta| \neq |\Omega|$ existiert; andernfalls heißt sie **imprimitiv**.

Ist $\omega \in \Omega$, so nennt man $G_\omega = \{g \in G \mid \omega^g = \omega\}$ den **Punktstabilisator** von ω .

Im folgenden sollen wichtige Eigenschaften der alternierenden Gruppen herausgearbeitet werden.

Definition 2.2 Mit A_n sei die **alternierende Gruppe** vom Grad n bezeichnet. Jedes Element α von A_n stellt eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ dar, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transitionen schreiben lässt. Ist $i \in \{1, \dots, n\}$, so wird mit $\alpha(i)$ das Bild des Elementes i unter der Permutation $\alpha \in A_n$ bezeichnet.

Lemma 2.3

- (i) Die alternierende Gruppe A_n operiert auf der Menge $\Omega = \{1, \dots, n\}$.
- (ii) Für $n \geq 3$ ist diese Operation transitiv.
- (iii) Für $n \geq 4$ ist diese Operation primitiv.

Beweis.

- (i) Jedes Element $\alpha \in A_n$ stellt eine Permutation der Elemente von Ω dar, dadurch wird die Gruppenoperation direkt beschrieben. Als Schreibweise wird auch hier $i^\alpha := \alpha(i)$ verwendet.

- (ii) Seien $i, j \in \Omega$ beliebig gewählt. Falls $i = j$, so gilt $i^{\text{id}} = j$. Ansonsten existiert wegen $n \geq 3$ ein $k \in \Omega \setminus \{i, j\}$ und es gilt $i^{(ijk)} = j$ mit $(ijk) \in A_n$.
- (iii) Dies folgt aus [KS98] 4.2.4 und 4.3.2. \square

Lemma 2.4 Sei $X \subseteq A_n$ definiert durch $X = \{\alpha \in A_n \mid \alpha(n) = n\}$. Dann gilt

- (i) $X \leq A_n$,
- (ii) $X \cong A_{n-1}$.

Beweis.

- (i) $\text{id} \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$. Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig gegeben. Da $x_1(n) = n = x_2(n)$, gilt auch $(x_1x_2)(n) = x_1(x_2(n)) = x_1(n) = n$ und somit $x_1x_2 \in X$. Aus $x_1(n) = n$ folgt sofort $x_1^{-1}(n) = n$ und somit $x_1^{-1} \in X$.
- (ii) Sei die Abbildung $\psi : A_{n-1} \mapsto X$ durch

$$\psi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & n \end{pmatrix}$$

definiert. Da sich jedes $\alpha \in A_{n-1}$ als Produkt von gerade vielen Transpositionen schreiben lässt, gilt wirklich stets $\psi(\alpha) \in X$, das heißt, alle Bilder von ψ liegen in X .

Die Injektivität von ψ ist klar.

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & n \end{pmatrix} \in X$ beliebig gewählt, $x_i \in \{1, \dots, n-1\}$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Da $x \in X \subseteq A_n$, lässt sich jedes x als Produkt von gerade vielen Transpositionen schreiben. Wegen $x(n) = n$ lässt sich eine Transpositionsdarstellung von x finden, in der n nicht vorkommt. Somit stellt diese Transpositionsdarstellung von x auch ein Element $\alpha \in A_{n-1}$ dar und es gilt $\psi(\alpha) = x$. Damit ist ψ auch surjektiv und stellt somit eine Bijektion dar. \square

Definition 2.5 Für jedes natürliche n soll mit \hat{A}_{n-1} die im Lemma 2.4 definierte Untergruppe $X \leq A_n$ bezeichnet werden, die zu A_{n-1} isomorph ist.

Bemerkung 2.6 A_n operiert transitiv auf $\{1, \dots, n\}$. \hat{A}_{n-1} ist dann gerade der Punktstabilisator des Punktes n .

Definition 2.7 Sei G eine Gruppe mit Untergruppe U . Dann bezeichne

$$G/U = \{gU \mid g \in G\}$$

die Menge der **Linksnebenklassen** und

$$U \backslash G = \{Ug \mid g \in G\}$$

die Menge der **Rechtsnebenklassen** von U in G .

Lemma 2.8 Die Rechtsnebenklassen von \hat{A}_{n-1} in A_n besitzen die Darstellung

$$\hat{A}_{n-1}\alpha_1, \dots, \hat{A}_{n-1}\alpha_n,$$

wobei $\alpha_i \in A_n$ mit $\alpha_i(i) = n$.

Beweis. Allgemein gilt nach der Definition von Rechtsnebenklassen

$$\hat{A}_{n-1} \backslash A_n = \{\hat{A}_{n-1}\alpha \mid \alpha \in A_n\}.$$

Wähle $\tilde{\alpha} \in A_n$ und sei m so gewählt, dass $\tilde{\alpha}(m) = n$. Jedes Element in $\hat{A}_{n-1}\tilde{\alpha}$ bildet dann das Element m auf das Element n ab, da alle Elemente in \hat{A}_{n-1} das Element n fest lassen. Wählt man somit Elemente $\alpha_i \in A_n$ mit $\alpha_i(i) = n$ für $i \in \Omega = \{1, \dots, n\}$, so gilt $\hat{A}_{n-1} \backslash A_n = \{\hat{A}_{n-1}\alpha_i \mid i \in \Omega\}$. \square

Lemma 2.9 Die Linksnebenklassen von \hat{A}_{n-1} in A_n besitzen die Darstellung

$$\alpha_1\hat{A}_{n-1}, \dots, \alpha_n\hat{A}_{n-1},$$

wobei $\alpha_i \in A_n$ mit $\alpha_i(n) = i$.

Beweis. Der Beweis kann wie der Beweis des vorangegangenen Lemmas geführt werden. \square

Im folgenden soll ein wichtiger Zusammenhang zwischen Epimorphismen und Untergruppen dargestellt werden. Die bestehende Äquivalenz bildet später die Grundlage für die Algorithmen, die Epimorphismen von Dreiecksgruppen bestimmen.

Theorem 2.10 Sei $\varphi : G \mapsto A_n (n \geq 3)$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann gilt

- (i) G operiert transitiv auf $\{1, \dots, n\}$.
- (ii) Für $n \geq 4$ operiert G primitiv auf $\{1, \dots, n\}$.
- (iii) Die Punktstabilisatoren G_1, \dots, G_n sind paarweise zueinander konjugierte Untergruppen von G vom Index $|G : G_i| = n$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis.

- (i) Die Operation von G auf der Menge $\Omega = \{1, \dots, n\}$ ist wie folgt definiert: $i^g := i^{\varphi(g)}$. Seien $i, j \in \Omega$ beliebig gewählt. Da nach Lemma 2.3(ii) die Gruppe A_n transitiv auf Ω operiert, existiert ein $\alpha \in \Omega$ mit $i^\alpha = j$. Da φ surjektiv ist, existiert ein Element $g \in G$ mit $\varphi(g) = \alpha$. Man erhält $i^{\varphi(g)} = j$ und damit $i^g = j$.
- (ii) Nach Lemma 2.3(iii) operiert A_n primitiv auf Ω . Im folgenden wird angenommen, dass G imprimitiv auf Ω operiert. Dann gibt es einen Block $\Delta \subset \Omega$ mit $1 \neq |\Delta| \neq |\Omega|$ und

$$\Delta^g \neq \Delta \Rightarrow \Delta^g \cap \Delta = \emptyset \text{ für alle } g \in G. \tag{2.1}$$

Die Operation von G ist definiert durch $\Delta^g = \Delta^{\varphi(g)}$. Es gilt $\{\varphi(g) \mid g \in G\} = A_n$, da φ surjektiv ist. Somit folgt aus (2.1):

$$\Delta^\alpha \neq \Delta \Rightarrow \Delta^\alpha \cap \Delta = \emptyset \text{ für alle } \alpha \in A_n.$$

Damit wäre Δ auch ein Imprimitivitätsgebiet für A_n , dies steht aber im Widerspruch zur Primitivität der Operation der alternierenden Gruppe auf Ω .

- (iii) Nach [KS98] 3.1.5 gilt für jedes Element $i \in \Omega$ die Bahngleichung $|i^G| = |G : G_i|$, d.h. die Länge der Bahn von i ist gleich dem Index des Punktstabilisators $G_i = \{g \in G \mid i^g = i\}$. Da G transitiv auf Ω operiert, besitzt jede Bahn die Länge n . Somit folgt sofort $|G : G_i| = |i^G| = n$ für alle $i \in \Omega$.

Nach [KS98] 3.1.3 gilt für alle $i \in \Omega$ und alle $g \in G$ stets $(G_i)^g = G_{i^g}$. Somit sind die n Stabilisatoren paarweise konjugiert zueinander. \square

Somit gilt stets: Hat man einen Epimorphismus $\varphi : G \mapsto A_n$ gefunden, so gibt es eine zugehörige Untergruppe $U \leq G$ vom Index n .

Hier soll allerdings der umgekehrte Weg gegangen werden. Für einen gegebenen Wert von n werden alle Untergruppen $U_i \leq G$ vom Index n bestimmt. Nach dem folgendem Lemma hat man damit alle transitiven Permutationsdarstellungen von G auf n Punkten gefunden. Anschließend muss durch weitere Überlegungen ermittelt werden, welche der gefundenen Untergruppen Punktstabilisatoren von Epimorphismen in die alternierende Gruppe darstellen.

Lemma 2.11 Die Suche der Untergruppen vom Index n ist äquivalent zur Suche der transitiven Permutationsdarstellungen auf n Punkten. Das bedeutet konkret:

- (i) U sei eine Untergruppe von G vom Index $|G : U| = n$. Dann operiert G auf den Rechtsnebenklassen von U transitiv durch Multiplikation.
- (ii) Besitzt G eine transitive Permutationsdarstellung auf n Punkten, so existiert eine Untergruppe $U \leq G$ vom Index n .

Beweis.

- (i) Sind Ux und Uy zwei Rechtsnebenklassen von U für $x, y \in G$, so gilt

$$(Ux)^{x^{-1}y} = U(xx^{-1}y) = Uy.$$

Damit ist die Operation transitiv.

- (ii) Wählt man für U den Punktstabilisator eines der n Punkte, so besitzt U wegen der Transitivität der Operation den Index n , vergleiche dazu Theorem 2.10(iii). \square

Beispiel 2.12 *Mit Hilfe des Computerprogramms [GAP] erhält man für die Dreiecksgruppe*

$$G = \Delta(3, 5, 57) = \langle x, y \mid x^3 = y^5 = (xy)^{57} = 1 \rangle$$

die folgenden Resultate. G besitzt drei nicht zueinander konjugierte Untergruppen vom Index $n = 6$, diese besitzen die folgenden Erzeuger.

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle x, yxy^{-1}, y^{-1}x^{-1}y^{-2}, y^{-1}xyx^{-1}y, y^{-2}xy^2 \rangle \\ U_2 &= \langle y, xy^{-1}x, xyxyx, xy^2xy^{-1}x^{-1} \rangle \\ U_3 &= \langle y, x^{-1}y^2x^{-1}, xyxyx, xyx^{-1}yx^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Die Rechtsnebenklassen lauten wie folgt.

$$\begin{aligned} U_1 \backslash G &= \{U_1, U_1y, U_1y^2, U_1y^2x, U_1y^3, U_1y^2x^2\} \\ U_2 \backslash G &= \{U_2, U_2x, U_2x^2, U_2xy, U_2xyx, U_2xy^2\} \\ U_3 \backslash G &= \{U_3, U_3x, U_3x^2, U_3xy, U_3x^2y, U_3xyx\} \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.11(i) operiert G transitiv auf den Rechtsnebenklassen von $U_1 \backslash G$ durch Rechtsmultiplikation. Nummeriert man die Rechtsnebenklassen von $U_1 \backslash G$ in der angegebenen Reihenfolge von 1 bis 6 durch, so operiert G auf der Menge $\{1, \dots, 6\}$ transitiv. Die Multiplikation der Rechtsnebenklassen von $U_1 \backslash G$ mit dem Erzeuger x lässt sich durch die Permutation (346) darstellen; die Multiplikation mit y entspricht der Permutation (12354). Wegen $\langle (346), (12354) \rangle = A_6$ operiert G auf $\{1, \dots, 6\}$ wie eine A_6 . Es gibt somit einen Homomorphismus $\varphi_1 : G \mapsto S_6$ mit der Definition $\varphi_1(x) = (346)$, $\varphi_1(y) = (12354)$ und der Eigenschaft $\varphi_1(G) \cong A_6$.

Analog erhält man aus der Operation von G auf den Rechtsnebenklassen von $U_2 \backslash G$ einen Homomorphismus $\varphi_2 : G \mapsto S_6$ mit der Definition $\varphi_2(x) = (123)(456)$, $\varphi_2(y) = (24653)$ und der Eigenschaft $\varphi_2(G) \cong A_6$.

Für die Operation von G auf den Rechtsnebenklassen von $U_3 \backslash G$ ergibt sich jedoch ein ganz anderes Bild. Die Definition des Homomorphismus $\varphi_3 : G \mapsto S_6$ durch $\varphi_3(x) = (123)(465)$, $\varphi_3(y) = (24635)$ führt zu $\varphi_3(G) \cong A_5$. Die Untergruppe $U_3 \leq G$ besitzt zwar den Index 6, aber G operiert auf den Rechtsnebenklassen von $U_3 \backslash G$ nicht wie eine A_6 , sondern nur wie eine A_5 .

2.2 Untergruppenketten

Lemma 2.11 bietet den Schlüssel für die nachfolgenden Überlegungen. Existiert ein Epimorphismus $\varphi : G \mapsto A_n$, so gilt also stets

$$N \trianglelefteq U < G,$$

wobei $N = \ker \varphi$ und U ein Punktstabilisator eines Punktes aus $\{1, \dots, n\}$ mit $|G : U| = n$ ist. Es stellt sich im folgenden heraus, dass das Bild der Untergruppe U unter φ isomorph zu $\hat{A}_{n-1} < A_n$ ist. Somit operiert U transitiv auf $\{1, \dots, n-1\}$, und der Punktstabilisator eines Elementes dieser Menge ist eine Untergruppe von U vom Index $n-1$. Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen, so dass man als Resultat eine Untergruppenkette

$$N = U_2 \triangleleft U_3 < U_4 < \dots < U_n = G$$

erhält mit $\varphi(U_i) \cong A_i$ für $i \in \{2, \dots, n\}$.

Definition 2.13 *Die Gruppe G operiere auf der Menge M , T sei das Tupel $[t_1, \dots, t_k] \subseteq M$. Als **Tupelstabilisator** wird die Teilmenge*

$$G_T = G_{[t_1, \dots, t_k]} = \{g \in G \mid g(t_i) = t_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

bezeichnet, dies ist also die Menge aller Gruppenelemente, die jedes Element des Tupels festlassen.

Lemma 2.14 Sei $\varphi : G \mapsto H$ ein Epimorphismus, H operiere transitiv auf $\{1, \dots, n\}$, G operiere auf $\{1, \dots, n\}$ durch

$$i^g := i^{\varphi(g)},$$

U sei der Tupelstabilisator

$$U = G_T = \{g \in G \mid T^g = T\}$$

für das Tupel

$$T = [i_1, \dots, i_k] \text{ mit } \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

Dann ist $\varphi(U) = H_T$.

Beweis.

- (i) $\varphi(U) \subseteq H_T$: Sei $h \in \varphi(U)$, d.h. $h = \varphi(u)$ für ein $u \in U$. Da $u \in U$, gilt $T^u = T$. Somit gilt $T^h = T^{\varphi(u)} = T^u = T \Rightarrow h \in H_T$.
- (ii) $\varphi(U) \supseteq H_T$: Sei $h \in H_T$, d.h. $T^h = T$. Da φ surjektiv ist, existiert ein $g \in G$ mit $\varphi(g) = h$. Somit gilt $T^g = T^{\varphi(g)} = T^h = T \Rightarrow h \in \varphi(U)$. \square

Das folgende Korollar stellt das Hauptresultat der bisherigen Überlegungen dar.

Korollar 2.15 Sei $\varphi : G \mapsto A_n$ ein Epimorphismus, $n \geq 3$. Dann gilt

- (i) G operiert transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ durch $i^g = i^{\varphi(g)}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$).
- (ii) Die Untergruppe $U = G_n = \{g \in G \mid n^g = n\}$ besitzt Index $|G : U| = n$.
- (iii) $\varphi(U) \cong A_{n-1}$
- (iv) Mit der Bezeichnung $N = \ker \varphi$ gibt es eine Untergruppenkette

$$N = U_2 \triangleleft U_3 < U_4 < \dots < U_n = G$$

definiert durch

$$U_i = G_{[n, n-1, \dots, i+2, i+1]} \text{ für } i \in \{2, \dots, n-1\}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} U_i/N &\cong \varphi(U_i) \cong A_i & (i \in \{2, \dots, n\}), \\ |U_i : U_{i-1}| &= i & (i \in \{3, \dots, n\}). \end{aligned}$$

Beweis.

- (i-ii) Diese Aussagen wurden schon im Theorem 2.10 gezeigt.
- (iii) Mit Hilfe von Lemma 2.14 und Lemma 2.4 folgt sofort:

$$\varphi(U) = \varphi(G_{[n]}) = (A_n)_{[n]} \cong A_{n-1}.$$

- (iv) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \varphi(U_n) &= \varphi(G) = A_n \\ \varphi(U_i) &= \varphi(G_{[n, \dots, i+1]}) = (A_n)_{[n, \dots, i+1]} \cong A_i \text{ für } i \in \{2, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Wegen $\ker \varphi \subseteq U_i$ und $\ker \varphi \triangleleft G$ gilt $\ker \varphi \triangleleft U_i$ und damit

$$U_i/\ker \varphi|_{U_i} \cong \text{im } \varphi|_{U_i} \Rightarrow U_i/N \cong \varphi(U_i).$$

Wie im Beweis vom Theorem 2.10 wird auch hier die Aussage verwendet, dass die Länge der Bahn eines Punktes gleich dem Index des Punktstabilisators ist. Da U_i auf $\{1, \dots, i\}$ transitiv operiert, gilt

$$|U_i : U_{i-1}| = |U_i : (U_i)_{[i]}| = |i^{U_i}| = i. \quad \square$$

Durch einen Epimorphismus von einer Gruppe G in die alternierende Gruppe A_n entstehen also zwei Untergruppenketten, die in G bzw. in A_n enthalten sind. Zwischen diesen Ketten bestehen mehrere Zusammenhänge. Der Homomorphismus bildet die Elemente der einen Kette auf die der anderen Kette ab. Betrachtet man in einer Kette zwei benachbarte Elemente, so ist die eine Gruppe ein Punktstabilisator der anderen.

2.3 Die Genus formula

Die *Genus formula* liefert für jede Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ mit Primzahlen p, q, r ein notwendiges Kriterium für die Existenz von Untergruppen bestimmter Indizes. Der klassische Beweis ist schon über ein Jahrhundert alt. Damals wurde die *Genus formula* aus einer speziellen Form der Riemann-Hurwitz-Formel für Riemannsche Flächen abgeleitet.

Einen völlig neuen Zugang lieferten 1988 Marston Conder und John McKay, die einen erstaunlich einfachen Beweis einer Variante der *Genus formula* präsentierten. Sie ersetzten damit kompliziertere Nachweisverfahren, die vorher sowohl von R. Ree, als auch von Feit, Lyndon und Scott publiziert wurden. Die Referenzen auf diese Artikel befinden sich in [CM88].

Zur Abrundung dieses Abschnitts wird ein Lemma angegeben, welches die Äquivalenz der zwei Varianten der *Genus formula* mit Hilfe zahlentheoretischer Begriffsbildungen explizit noch einmal aufzeigt. Damit wird klar, wie die beiden Varianten auseinander hervorgehen.

Die Erarbeitung dieses Abschnitts erforderte etwas Aufwand, da es keine Referenz gibt, die beide Varianten im Vergleich darstellt. In diesem Zusammenhang möchte ich besonders Marston Conder (New Zealand Institute of Mathematics and its Applications), Robert Guralnick (University of Southern California) und Wilson Stothers (University of Glasgow) danken, die mir mit Hinweisen zu Beweisideen zur Seite standen.

In der Literatur geben viele Autoren die *Genus formula* für die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ an.

Theorem 2.16 (Genus formula) *Damit die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ eine Untergruppe vom Index n besitzt (oder eine transitive Permutationsdarstellung vom Grad n), müssen natürliche Zahlen d, e, f und g existieren mit*

$$n = 84(d - 1) + 21e + 28f + 36g.$$

Beweis. Dieser Beweis basiert auf einer privaten Kommunikation mit Robert Guralnick; eine konkrete Literaturstelle kann leider nicht als Referenz angegeben werden. Angewendet wird eine verallgemeinerte Version der Riemann-Hurwitz-Formel für nicht-galoissche Überlagerungen. Man betrachte eine Riemannsche Fläche, die an den drei Punkten $0, 1$ und ∞ die Verzweigungsordnungen $2, 3$ und 7 besitzt. Besitzt dann die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ eine Untergruppe vom Index n , so existiert eine Überlagerung vom Grad n der Riemannschen Fläche vom Geschlecht d und es gilt

$$2(d + n - 1) = \frac{1}{2}(n - e) + \frac{2}{3}(n - f) + \frac{6}{7}(n - g)$$

für geeignete nicht-negative ganze Zahlen e, f und g . Dies ergibt

$$2(d - 1) + \frac{e}{2} + \frac{2f}{3} + \frac{6g}{7} = \frac{n}{42},$$

was nach Multiplikation mit dem Hauptnenner sofort auf die Behauptung

$$n = 84(d - 1) + 21e + 28f + 36g$$

führt. □

Ein ganz anderer Beweisgedanke benutzt das folgende Theorem von Marston Conder und John McKay, welches vorher bereits sowohl von R. Ree als auch von Feit, Lyndon und Scott bewiesen wurde.

Theorem 2.17 (Conder, McKay [CM88]) *G sei eine Permutationsgruppe auf der Menge Ω der Größe n . G sei erzeugt von den Elementen g_1, g_2, \dots, g_s , deren Produkt die Identität sei. Falls jeder Erzeuger g_i für $1 \leq i \leq s$ genau c_i Zyklen besitzt und G auf Ω transitiv operiert, dann gilt*

$$n(s - 2) - \sum_{i=1}^s c_i + 2 \geq 0.$$

Als natürliche Voraussetzung wird dabei $s \geq 2$ angenommen. Mit *Zyklen* werden sowohl 1-Zyklen (Fixpunkte), 2-Zyklen (Transpositionen), 3-Zyklen usw. bezeichnet. Als direkte Folgerung aus diesem Theorem lässt sich für die Dreiecksgruppen der Form $\Delta(p, q, r)$ mit drei Primzahlen p, q, r ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Untergruppe für einen vorgegebenen Index ableiten.

Theorem 2.18 *Besitzt die Dreiecksgruppe*

$$\Delta(p, q, r) = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle$$

mit Primzahlen p, q, r eine Untergruppe vom Index n , so gilt

$$(p-1) \left[\frac{n}{p} \right] + (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] + (r-1) \left[\frac{n}{r} \right] \geq 2n - 2,$$

dabei ist $[t]$ der ganzzahlige Teil der rationalen Zahl t (Gauß-Klammer).

Beweis. Mit der Untergruppe U vom Index n besitzt $\Delta(p, q, r)$ eine transitive Permutationsdarstellung auf den n Rechtsnebenklassen von U . Mit den Bezeichnungen aus Theorem 2.17 gilt

$$s = 3, g_1 = x, g_2 = y, g_3 = z.$$

Da p eine Primzahl ist, kann der Erzeuger x nur eine Zyklendarstellung der Form $1^a p^b$ besitzen (a Fixpunkte und b Zyklen der Länge p). Für die Gesamtanzahl der Zyklen von x erhält man somit:

$$c_1 \geq \min_{\substack{a+bp=n \\ a \geq 0, b \geq 0}} \{a+b\} = \min_{\substack{n-bp \geq 0 \\ b \geq 0}} \{n-bp+b\} = \min_{0 \leq b \leq \frac{n}{p}} \{n-b(p-1)\} = n - (p-1) \left[\frac{n}{p} \right]$$

Analoge Überlegungen sind für die Erzeuger y und z möglich, sodass man für die Summe der Zyklenlängen insgesamt erhält:

$$\sum_{i=1}^3 c_i \geq 3n - (p-1) \left[\frac{n}{p} \right] - (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] - (r-1) \left[\frac{n}{r} \right]$$

Somit folgt aus Theorem 2.17:

$$n(3-2) + 2 \geq \sum_{i=1}^3 c_i \geq 3n - (p-1) \left[\frac{n}{p} \right] - (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] - (r-1) \left[\frac{n}{r} \right],$$

und damit

$$(p-1) \left[\frac{n}{p} \right] + (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] + (r-1) \left[\frac{n}{r} \right] \geq 3n - n - 2 = 2n - 2.$$

Das ist die Behauptung. □

Marston Conder gibt in [Con80] an, dass für die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 3, 7)$ die Genus formula 2.16 und das Theorem 2.18 äquivalent sind. Das folgende Lemma zeigt den Beweisgedanken auf.

Lemma 2.19 *Ist n eine nichtnegative ganze Zahl, so sind äquivalent*

(i) *Es gibt nichtnegative ganze Zahlen d, e, f und g mit $n = 84(d-1) + 21e + 28f + 36g$.*

(ii) *Es gilt $\left[\frac{n}{2} \right] + 2 \left[\frac{n}{3} \right] + 6 \left[\frac{n}{7} \right] \geq 2n - 2$.*

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Aus $n = 84(d-1) + 21e + 28f + 36g$ folgt

$$\left[\frac{n}{2} \right] \geq 42(d-1) + 10e + 14f + 18g, \text{ da } e \geq 0;$$

$$\left[\frac{n}{3} \right] \geq 28(d-1) + 7e + 9f + 12g, \text{ da } f \geq 0;$$

$$\left[\frac{n}{7} \right] \geq 12(d-1) + 3e + 4f + 5g, \text{ da } g \geq 0.$$

Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{2} \right] + 2 \left[\frac{n}{3} \right] + 6 \left[\frac{n}{7} \right] &\geq (42 + 56 + 72)(d-1) + (10 + 14 + 18)e + (14 + 18 + 24)f \\ &\quad + (18 + 24 + 30)g \\ &= 170(d-1) + 42e + 56f + 72g \\ &= 2n + 2(d-1) \\ &\geq 2n - 2, \text{ da } d \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i): e sei der Rest von n bei Division durch 4. Somit gilt

$$e \in \{0, 1\} : \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n-e}{2}, \quad e \in \{2, 3\} : \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n-e}{2} + 1$$

Bezeichnet f den Rest von n bei Division durch 3 und ist g der Rest von n bei Division durch 7, so gilt

$$\left[\frac{n}{3} \right] = \frac{n-f}{3}, \quad \left[\frac{n}{7} \right] = \frac{n-g}{7}.$$

Insgesamt erhält man daraus zum einen

$$\begin{aligned} n \equiv e \pmod{4} &\Rightarrow n \equiv 21e \pmod{4} \Rightarrow n - 21e - 28f - 36g \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \equiv f \pmod{3} &\Rightarrow n \equiv 28f \pmod{3} \Rightarrow n - 21e - 28f - 36g \equiv 0 \pmod{3}, \\ n \equiv g \pmod{7} &\Rightarrow n \equiv 36g \pmod{7} \Rightarrow n - 21e - 28f - 36g \equiv 0 \pmod{7}, \\ &\Rightarrow n - 21e - 28f - 36g \equiv 0 \pmod{84}. \end{aligned}$$

Zum anderen folgt aus (ii) im Fall $e \in \{0, 1\}$

$$\frac{n-e}{2} + 2 \frac{n-f}{3} + 6 \frac{n-g}{7} \geq 2n - 2 \Leftrightarrow n - 21e - 28f - 36g \geq -84$$

und im Fall $e \in \{2, 3\}$

$$\frac{n-e}{2} + 1 + 2 \frac{n-f}{3} + 6 \frac{n-g}{7} \geq 2n - 2 \Leftrightarrow n - 21e - 28f - 36g \geq -126.$$

Damit stellt die Zahl $n - 21e - 28f - 36g$ ein Vielfaches von 84 dar, welches größer als -127 ist. Somit existiert eine nichtnegative Zahl d mit $n - 21e - 28f - 36g = 84(d - 1)$. \square

Das folgende Lemma verallgemeinert dieses Resultat und beinhaltet damit die Gleichung der *Genus formula* für eine allgemeine Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ mit Primzahlen p, q, r .

Lemma 2.20 *Ist n eine nichtnegative ganze Zahl und sind p, q, r Primzahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, so sind äquivalent*

(i) *Es gibt nichtnegative ganze Zahlen d, e, f und g mit*

$$[pqr - (pq + pr + qr)]n = 2pqr(d - 1) + (p - 1)qr e + p(q - 1)r f + pq(r - 1)g.$$

(ii) *Es gilt $(p - 1)\left[\frac{n}{p}\right] + (q - 1)\left[\frac{n}{q}\right] + (r - 1)\left[\frac{n}{r}\right] \geq 2n - 2$.*

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Verwendet man die abkürzende Schreibweise $D = pqr - (pq + pr + qr)$, so seien die Zahlen u, v, w definiert durch

$$\begin{aligned} u \in \{0, \dots, p - 1\} : (p - 1)qr &\equiv u \pmod{p} \Rightarrow D \equiv u \pmod{p}, \\ v \in \{0, \dots, q - 1\} : p(q - 1)r &\equiv v \pmod{q} \Rightarrow D \equiv v \pmod{q}, \\ w \in \{0, \dots, r - 1\} : pq(r - 1) &\equiv w \pmod{r} \Rightarrow D \equiv w \pmod{r}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Gleichung in (i) nach Division durch p, q bzw. r abschätzen durch

$$\begin{aligned} D \left[\frac{n}{p} \right] &\geq 2qr(d - 1) + \frac{(p - 1)qr - u}{p} e + (q - 1)r f + q(r - 1)g, \text{ da } e \geq 0, \\ D \left[\frac{n}{q} \right] &\geq 2pr(d - 1) + (p - 1)r e + \frac{p(q - 1)r - v}{q} f + p(r - 1)g, \text{ da } f \geq 0, \\ D \left[\frac{n}{r} \right] &\geq 2pq(d - 1) + (p - 1)q e + p(q - 1) f + \frac{pq(r - 1) - w}{r} g, \text{ da } g \geq 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} D(p - 1) \left[\frac{n}{p} \right] + D(q - 1) \left[\frac{n}{q} \right] + D(r - 1) \left[\frac{n}{r} \right] \\ \geq 2Dn + 2D(d - 1) + \frac{p - 1}{p}(D - u)e + \frac{q - 1}{q}(D - v)f + \frac{r - 1}{r}(D - w)g \\ \geq D(2n - 2), \text{ da } d \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ist möglich, da wegen $D = pqr(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r})$ die Zahl D stets positiv ist, und wegen $D \equiv u \pmod{p}$, $D \equiv v \pmod{q}$ und $D \equiv w \pmod{r}$ stets $D - u \geq 0$, $D - v \geq 0$ und $D - w \geq 0$ gilt. Die Ungleichung in (ii) erhält man schließlich bei Division durch $D \geq 0$.

(ii) \Rightarrow (i): Es gelte $p \leq q \leq r$, notfalls wird eine Umbenennung vorgenommen. Somit folgt aus der Primzahleigenschaft und der Bedingung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, dass $p \geq 2$, $q, r \geq 3$ und damit q und r stets ungerade sind.

In diesem Beweis werden in jedem Schritt die beiden Fälle $p = 2$ und $p > 2$ unterschieden. Ist $p = 2$, so bezeichne e den Rest von n bei Division durch 4, im Falle $p > 2$ sei e der Rest von n bei Division durch p . Weiterhin sei in beiden Fällen f der Rest von n bei Division durch q und g sei der Rest von n bei Division durch r . Somit gelten die Kongruenzen

$$\begin{aligned} p = 2: \quad n &\equiv e \pmod{4}, & p > 2: \quad n &\equiv e \pmod{p}, \\ n &\equiv f \pmod{q}, & n &\equiv g \pmod{r}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhält man für $p = 2$ das Resultat

$$\begin{aligned} Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\equiv (pqr - pq - pr - qr)e - (p-1)qre \\ &\equiv (pqr - pq - pr - qr - pqr + qr)e \equiv -p(q+r)e \equiv 0 \pmod{4}, \end{aligned}$$

da $(q-1)$, $(r-1)$ und $(q+r)$ gerade sind. Für $p > 2$ gilt

$$\begin{aligned} Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\equiv (pqr - pq - pr - qr)e - (p-1)qre \\ &\equiv (pqr - pq - pr - qr - pqr + qr)e \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Analog erhält man in beiden Fällen

$$\begin{aligned} Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\equiv (pqr - pq - pr - qr)f - p(q-1)rf \\ &\equiv (pqr - pq - pr - qr - pqr + pr)f \equiv 0 \pmod{q}, \\ Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\equiv (pqr - pq - pr - qr)g - pq(r-1)g \\ &\equiv (pqr - pq - pr - qr - pqr + pq)g \equiv 0 \pmod{r}. \end{aligned}$$

Im Fall $p = 2$ sind $2p$, q und r paarweise relativ prim zueinander, für $p > 2$ ist $D = pqr - pq - pr - qr$ durch 2 teilbar, da p , q und r ungerade sind. Somit gilt in beiden Fällen stets

$$Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g \equiv 0 \pmod{2pqr}.$$

Weiterhin gilt nach Definition der Gaußschen Klammer

$$\begin{aligned} p = 2: \quad \left[\frac{n}{p} \right] &= \begin{cases} \frac{n-e}{p} & \text{für } e \in \{0, 1\} \\ \frac{n-e}{p} + 1 & \text{für } e \in \{2, 3\} \end{cases}, & p > 2: \quad \left[\frac{n}{p} \right] &= \frac{n-e}{p}, \\ \left[\frac{n}{q} \right] &= \frac{n-f}{q}, & \left[\frac{n}{r} \right] &= \frac{n-g}{r}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung in (ii) folgt somit für $p = 2$ und $e \in \{0, 1\}$ bzw. für $p > 2$ sofort

$$\begin{aligned} (p-1)\frac{n-e}{p} + (q-1)\frac{n-f}{q} + (r-1)\frac{n-g}{r} &\geq 2n-2 \\ \Leftrightarrow (p-1)qr(n-e) + p(q-1)r(n-f) + pq(r-1)(n-g) &\geq (2n-2)pqr \\ \Leftrightarrow (3pqr - qr - pr - pq - 2pqr)n - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\geq -2pqr \\ \Leftrightarrow Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\geq -2pqr. \end{aligned}$$

Für $p = 2$ und $e \in \{2, 3\}$ erhält man analog

$$\begin{aligned} (p-1)\left(\frac{n-e}{p} + 1\right) + (q-1)\frac{n-f}{q} + (r-1)\frac{n-g}{r} &\geq 2n-2 \\ \Leftrightarrow Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g &\geq -(p+1)pqr = -3pqr. \end{aligned}$$

Somit existiert stets ein $d \geq 0$ mit $Dn - (p-1)qre - p(q-1)rf - pq(r-1)g = 2pqr(d-1)$. \square

2.4 Die Genus formula als Transitivitätskriterium

Das Kriterium aus Theorem 2.18 lässt sich hervorragend dazu benutzen, für eine vorgegebene Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ mit Primzahlen p, q und r eine Liste von Indizes n zu erstellen, für die es keine Untergruppen gibt.

Für die praktische Anwendbarkeit ist es wichtig zu wissen, ab welchen Wert für n die Bedingung aus Theorem 2.18 stets erfüllt ist, d.h. gesucht ist eine Schranke für n , ab der das Theorem keine Aussage mehr liefert.

Lemma 2.21 *Ist $\Delta(p, q, r)$ eine Fuchssche Dreiecksgruppe mit Primzahlen p, q, r , so gilt für alle*

$$n \geq \frac{p + q + r + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - 8}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)}$$

stets

$$(p-1) \left[\frac{n}{p} \right] + (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] + (r-1) \left[\frac{n}{r} \right] \geq 2n - 2.$$

Beweis. Hier wird Gebrauch gemacht von der offensichtlichen Abschätzung der Gaußschen Klammer, die für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$$\left[\frac{a}{b} \right] \geq \frac{a}{b} - \frac{b-1}{b}.$$

Damit erhält man sofort

$$\begin{aligned} & (p-1) \left[\frac{n}{p} \right] + (q-1) \left[\frac{n}{q} \right] + (r-1) \left[\frac{n}{r} \right] \\ & \geq (p-1) \left(\frac{n}{p} - \frac{p-1}{p} \right) + (q-1) \left(\frac{n}{q} - \frac{q-1}{q} \right) + (r-1) \left(\frac{n}{r} - \frac{r-1}{r} \right) \\ & = \left[3 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \right] n + \left[6 - \left(p + q + r + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \right] \geq 2n - 2, \text{ da} \\ & \left[1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \right] n \geq p + q + r + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) - 8 \Leftrightarrow n \geq \frac{p + q + r + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) - 8}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right)} \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist möglich, da für eine Fuchssche Dreiecksgruppe stets $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ gilt. \square

Da die Schranke aus Lemma 2.21 sehr unhandlich ist, wird im folgenden gezeigt, dass sie für die meisten Dreiecksgruppen stets kleiner als $3 \max\{p, q, r\}$ ist.

Lemma 2.22 *Für $4 \leq p \leq r$, $\frac{p(p-1)}{p-3} \leq q \leq r$ gilt*

$$\frac{p + q + r + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - 8}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)} < 3r.$$

Beweis. Aus

$$\frac{p(p-1)}{p-3} \leq q$$

folgt wegen $p \geq 4$ sofort

$$p-1 \leq \frac{q(p-3)}{p} = q - \frac{3q}{p} \Leftrightarrow p+q-4 \leq q \left(2 - \frac{3}{p} - \frac{3}{q} \right)$$

Der Ausdruck $\left(2 - \frac{3}{p} - \frac{3}{q} \right)$ ist wegen $p \geq 4$ und $q \geq 3$ stets positiv, somit erhält man wegen $q \leq r$ weiter

$$p+q-4 \leq r \left(2 - \frac{3}{p} - \frac{3}{q} \right) \Leftrightarrow p+q+r-7 \leq 3r - \frac{3r}{p} - \frac{3r}{q} - 3 \Leftrightarrow \frac{p+q+r-7}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)} \leq 3r,$$

womit die Behauptung wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ aus

$$\frac{p + q + r + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - 8}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)} < \frac{p + q + r + 1 - 8}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)} \leq 3r$$

folgt. □

Mit Hilfe dieser Abschätzung lässt sich das folgende für die konkrete Suche nach Epimorphismen in alternierende Gruppen verwertbare Kriterium erzielen. (Dabei werden die einschränkenden Bedingungen von Lemma 2.22 vorausgesetzt.)

Korollar 2.23 *Besitzt eine Dreiecksgruppe $G = \Delta(p, q, r)$ mit Primzahlen p, q, r einen Epimorphismus $\varphi : G \mapsto A_n (n \geq 3)$, so gilt*

$$(p-1) \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + (q-1) \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + (r-1) \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \geq 2n - 2.$$

Diese Bedingung ist für $n > 3 \max\{p, q, r\}$ stets erfüllt, ist dann also nicht mehr für den Nachweis der Nichtexistenz von Epimorphismen in die A_n geeignet.

Beweis. Nach 2.10 folgt aus der Existenz des Epimorphismus in die alternierende Gruppe die Existenz von Untergruppen der Dreiecksgruppe vom Index n . Nach 2.18 erfüllen p, q, r dann die angegebene Bedingung (Alternativdarstellung der Genus formula). Lemma 2.21 und Lemma 2.22 weisen nach, dass die Ungleichung für $n > 3 \max\{p, q, r\}$ stets erfüllt ist, unabhängig von den Eigenschaften der Dreiecksgruppe. □

2.5 Computergestützte Suche nach alternierenden Faktorgruppen

Im folgenden soll aufgezeigt werden, mit welchen beiden grundsätzlichen Methoden das Computer-Algebra-Programm GAP (*Groups and Programming* [GAP]) dazu verwendet werden kann, für eine konkrete Dreiecksgruppe G und einen konkreten Wert n zu entscheiden, ob es einen Epimorphismus $G \mapsto A_n$ gibt oder nicht. Da die Dreiecksgruppe eine endliche Präsentation besitzt, ist zur eindeutigen Definition eines Epimorphismus nur die Angabe der Bilder der beiden Erzeuger notwendig. Sind für die Dreiecksgruppe $G = \Delta(p, q, r)$ die Zahlen p, q, r Primzahlen, so macht es nur Sinn, für

$$n \in \{\max\{p, q, r\}, \dots, 3 \max\{p, q, r\}\}$$

zu prüfen, ob die Ungleichung aus Korollar 2.23 erfüllt ist. Für diejenigen Werte n , die sie nicht erfüllen, gibt es folglich keinen Epimorphismus $\Delta(p, q, r) \mapsto A_n$. Eine Einbeziehung der Werte für $n < \max\{p, q, r\}$ ist dann nicht nötig, da die alternierende Gruppe A_n keine Elemente einer Primzahlordnung größer als n besitzen kann.

Die Implementation dieses aus der Genus formula abgeleiteten notwendigen Kriteriums in der Programmiersprache GAP ist unten aufgeführt. Diese Funktionalität kann hervorragend als Ausschlusstest für die Existenz von Epimorphismen verwendet werden.

```
# Funktion div
# - Ganzzahlige Division.
div := function(a, b)
    return (a - (a mod b)) / b;
end;

# Funktion HasNoUG
# - Ungleichungstest anhand Dreiecksgruppe (p, q, r) und Index n.
HasNoUG := function(p, q, r, n)
    if (IsPrime(p) and IsPrime(q) and IsPrime(r)) then
        return (div(n,p)*(p-1) + div(n,q)*(q-1) + div(n,r)*(r-1) < 2 * (n-1));
    else
        Error("Primzahlen p, q, r erwartet.");
    fi;
end;
```

```
# Funktion NoUGInd
# - Erstellt Liste aller Indizes n mit Nichtexistenz von Epimorphismen.
NoUGInd := function(p, q, r)
  local maxpqr, schranke;
  if (IsPrime(p) and IsPrime(q) and IsPrime(r)) then
    maxpqr := Maximum(p, q, r);
    schranke := Int((p+q+r+1/p+1/q+1/r-8)/(1-1/p-1/q-1/r)) + 1;
    return Filtered([maxpqr..schranke], n -> HasNoUG(p, q, r, n));
  else
    Error("Primzahlen p, q, r erwartet.");
  fi;
end;
```

Die folgende Tabelle enthält für einige Dreiecksgruppen diejenigen Werte von n , die die Bedingung aus Korollar 2.23 nicht erfüllen, für die es also keine Epimorphismen in die A_n gibt.

Gruppe	Schranke aus Lemma 2.21	Nicht erfüllende Werte n	Anzahl
$\Delta(3, 5, 7)$	23.7	{13}	1
$\Delta(5, 7, 11)$	27.3	{19}	1
$\Delta(7, 11, 13)$	33.8	{19, 20}	2
$\Delta(11, 13, 17)$	43.0	{21, 32}	2
$\Delta(13, 17, 19)$	50.7	{25, 31, 32, 33}	4
$\Delta(17, 19, 23)$	60.5	{30, 31, 32, 33}	4
$\Delta(19, 23, 29)$	72.6	{36, 37, 45, 56}	4
$\Delta(23, 29, 31)$	84.4	{42, 43, 44, 45, 53, 54, 55, 56, 57}	9

Die erste in GAP verfügbare Funktion, mit der man alternierende Faktorgruppen von Dreiecksgruppen bestimmen kann, heißt `GQuotients` und kann wie folgt eingesetzt werden.

```
EpimorphismFromTriangleGroup := function(p, q, r, n)
  # Dreiecksgruppe definieren
  local F, G;
  F := FreeGroup("x", "y");
  G := F / [F.1^p, F.2^q, (F.1 * F.2)^r];
  # Alle Epimorphismen von G in die alternierende Gruppe als Liste bestimmen.
  return GQuotients(G, AlternatingGroup(n));
end;
```

Die Funktion `GQuotients` bestimmt alle Epimorphismen bis auf Automorphismen der alternierenden Gruppe. Dies bedeutet unmittelbar, dass die Kerne der berechneten Abbildungen voneinander verschieden sind. Für das Beispiel $\Delta(3, 5, 5) \mapsto A_5$ erzeugt diese Funktion die folgende Ausgabe.

```
gap> EpimorphismFromTriangleGroup(3, 5, 5, 5);
[ [ x, y ] -> [ (1,2,3), (1,2,3,4,5) ],
  [ x, y ] -> [ (1,2,4), (1,2,3,4,5) ] ]
```

Es gibt also bis auf A_5 -Automorphismen genau zwei Epimorphismen $\Delta(3, 5, 5) \mapsto A_5$. Die Abbildungen sind durch ihre Bilder auf den Erzeugern x und y der Dreiecksgruppe angegeben.

Einen zweiten Weg der Berechnung von alternierenden Faktorgruppen liefert eine Anwendung von Theorem 2.10 und dem folgenden Lemma.

Lemma 2.24 ([KS98]) *Ist $U \leq S_n$ Untergruppe der symmetrischen Gruppe mit Index $|S_n : U| = 2$, so ist $U \cong A_n$.*

Korollar 2.25 *Besitzt die Gruppe G eine Untergruppe U vom Index $|G : U| = n$, dann operiert G auf den Rechtsnebenklassen von U in G durch Rechtsmultiplikation.*

Diese Operation induziert einen Homomorphismus $\varphi : G \mapsto S_n$, da jedes Element aus G eine Permutation der n Rechtsnebenklassen darstellt.

Gilt $|\varphi(G)| = |A_n|$, so muss $\varphi(G) = A_n$ gelten, da die symmetrische Gruppe nach Lemma 2.24 sonst keine weiteren Untergruppen vom Index 2 besitzt.

Daraus ergibt sich folgender Algorithmus, der zu gegebener Gruppe G und gegebenem Index n bestimmt, ob die alternierende Gruppe A_n ein homomorphes Bild von G ist.

- (1) Benutze den `LowIndexSubgroupsFpGroup`-Algorithmus, um alle Untergruppen U von G zu finden, die einen Index $|G : U| \leq n$ besitzen.
- (2) Wird eine Untergruppe $U \leq G$ gefunden mit
 - (a) $|G : U| = n$ und
 - (b) `Size(Image(FactorCosetAction(G, U))) = $\frac{n!}{2}$` ,
 so sichere U in der Ergebnisliste.
- (3) Erfüllt keine Untergruppe die Bedingungen aus (2), so gib eine leere Ergebnisliste zurück.

Es soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass dieser Algorithmus zwei verschiedene Fragestellungen beantworten kann. Soll lediglich die Existenz mindestens eines Epimorphismus festgestellt werden, so kann der Algorithmus im Punkt (2) abgebrochen werden, sobald die Ergebnisliste eine Untergruppe enthält. Eine vollständige Ermittlung aller Untergruppen bis zum maximalen Index n mit anschließender Ordnungsberechnung des Bildes der Gruppe unter der Operation sprengt den zeitlichen Rahmen meist erheblich und ist deshalb nur für sehr kleine n praktikabel ($n \leq 12$).

Im obigen Beispiel erhält man für die Dreiecksgruppe

$$G = \Delta(3, 5, 5) = \langle x, y \mid x^3 = y^5 = (xy)^5 = 1 \rangle$$

die folgenden drei in G nicht zueinander konjugierten Untergruppen vom Index 5

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle x, yxy^{-1}, y^{-1}xy, y^2xy^{-2} \rangle, \\ U_2 &= \langle x, yxy^{-1}, y^{-1}xy^{-2}, y^{-2}xy \rangle, \\ U_3 &= \langle x, yx^{-1}y, y^2x^{-1}y^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\Delta(3, 5, 5)$ nur auf den Nebenklassen der ersten beiden Untergruppen wie eine A_5 operiert. Somit liefert die Verwendung dieser Methode das gleiche Ergebnis wie die erste Variante. Der größte Vorteil bei diesem Verfahren ist, dass es auch für größere n ($n \in \{3, \dots, 300\}$) praktikabel ist.

Dieses Beispiel wird später noch einmal aufgegriffen. Dann soll die Fragestellung geklärt werden, ob die Kerne N_1 und N_2 der beiden gefundenen Epimorphismen $\Delta(3, 5, 5) \mapsto A_5$ in der Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Mit GAP lässt sich schnell ermitteln, dass N_1 und N_2 innerhalb der Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ nicht zueinander konjugiert sind. Bei Normalteilern würde dies nämlich die Gleichheit bedeuten.

3 Dreiecksgruppen als Transformationsgruppen der hyperbolischen Ebene

In diesem Kapitel wird die exakte Definition von Dreiecksgruppen nachgereicht. Dazu ist eine Einleitung in hyperbolische Geometrie nötig, da ein Element einer Dreiecksgruppe als längenerhaltender Isomorphismus der hyperbolischen Ebene angesehen werden kann. Anschließend wird eine Darstellung einer Dreiecksgruppe als Untergruppe der Matrixgruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ hergeleitet, die exakte Rechnungen mit Elementen der Dreiecksgruppe auf dem Computer zulässt. Weiterhin wird nachgewiesen, dass die Multiplikation von Dreiecksgruppenelementen als Multiplikation in einer geeigneten Quaternionen-Algebra aufgefasst werden kann. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden allgemeine Aussagen zur Konjugiertheit von Dreiecksgruppenelementen hergeleitet. Diese werden bei der Untersuchung, ob zwei Normalteiler einer Dreiecksgruppe in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind, benötigt.

3.1 Hyperbolische Geometrie

Für die hyperbolische Ebene werden sowohl das Lobachevskii-, als auch das Poincaré-Modell verwendet. Diese Einleitung basiert maßgeblich auf [Kat92], [Bea83] und [Ive92].

Definition 3.1 *Die obere komplexe Halbebene*

$$\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

stellt ausgestattet mit der Metrik

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

ein Modell für die hyperbolische Ebene dar (Lobachevskii-Ebene).

Definition 3.2 *Die offene Einheitskreisscheibe*

$$\mathcal{U}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

stellt ausgestattet mit der Metrik

$$\rho^*(z_1, z_2) = \ln \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene dar.

Definition 3.3 Als **Geodäte** (geodesic) wird in beiden Modellen die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte bezüglich der jeweiligen Metrik verstanden.

Theorem 3.4

- (1) Die Geodäten in \mathcal{H}^2 sind gerade die Halbkreise und Strahlen, die orthogonal zu der reellen Achse \mathbb{R} sind.
- (2) Die Geodäten in \mathcal{U}^2 sind Durchmesser des Einheitskreises und Kreissegmente, die orthogonal zum Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sind.
- (3) Je zwei Punkte der hyperbolischen Ebene können durch genau eine Geodäte verbunden werden.
- (4) In der hyperbolischen Geometrie ist Euklids Parallelenaxiom nicht erfüllt, da es zu jeder Geodäte L und jedem Punkt $z \notin L$ stets mehr als eine Geodäte durch z gibt, die keinen Punkt mit L gemeinsam hat.

Theorem 3.5

(1) Die Funktion

$$f: \mathcal{H}^2 \mapsto \mathcal{U}^2, f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

stellt eine Bijektion zwischen \mathcal{H}^2 und \mathcal{U}^2 dar, die die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \mathcal{U}^2 \mapsto \mathcal{H}^2, f^{-1}(z) = \frac{1+z}{1-z} i$$

besitzt.²

(2) Somit besteht zwischen den Metriken die Beziehung

$$\rho^*(z_1, z_2) = \rho(f^{-1}(z_1), f^{-1}(z_2)).$$

Längentreue Isomorphismen der hyperbolischen Ebene spielen eine entscheidende Rolle für alle nachfolgenden Begriffsbildungen.

Definition 3.6 Eine **Isometrie** ist ein Isomorphismus von \mathcal{H}^2 , der hyperbolische Längen beibehält. Die Isometrien von \mathcal{H}^2 bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die mit $\text{Isom}(\mathcal{H}^2)$ bezeichnet werden soll.

Definition 3.7 Wie üblich definiert man die linearen Gruppen über einem Körper \mathbb{K} durch

$$\begin{aligned} GL(2, \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc \neq 0 \right\}, \\ SL(2, \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc = 1 \right\}, \\ PSL(2, \mathbb{K}) &= SL(2, \mathbb{K}) / \{I, -I\} \text{ mit } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ S^*L(2, \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc = \pm 1 \right\}, \\ PS^*L(2, \mathbb{K}) &= S^*L(2, \mathbb{K}) / \{I, -I\}. \end{aligned}$$

Definition 3.8 Die Menge der **Möbius-Transformationen** von \mathbb{C} auf sich besitzt die Gestalt

$$\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

und bildet eine Gruppe mit dem neutralem Element Id, der identischen Abbildung, bezüglich der Hintereinanderausführung. Geometrisch gesehen ist eine Möbius-Transformation eine Nacheinanderausführung von endlich vielen Spiegelungen an Kreisen oder Geraden.

Theorem 3.9

- (1) Jede Möbius-Transformation bildet Geodäten auf Geodäten ab.
- (2) Zu je zwei Geodäten existieren Möbius-Transformationen, die diese aufeinander abbilden.
- (3) Die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ operiert auf \mathcal{H}^2 durch:

$$z \in \mathcal{H}^2, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \Rightarrow z^g = \frac{az+b}{cz+d}.$$

- (4) $\mathcal{M} \cong PSL(2, \mathbb{R})$ und \mathcal{M} ist eine Untergruppe von $\text{Isom}(\mathcal{H}^2)$ vom Index 2.
- (5) $\text{Isom}(\mathcal{H}^2) = \langle \mathcal{M}, S \rangle \cong PS^*L(2, \mathbb{R})$, $S: z \mapsto -\bar{z}$ ist die Spiegelung an der imaginären Achse.

²Diese Bijektion wird in [Bea83] angegeben. Svetlana Katok verwendet in [Kat92]

$$\tilde{f}: \mathcal{H}^2 \mapsto \mathcal{U}^2, \tilde{f}(z) = \frac{zi+1}{z+i} = f(z) \cdot i,$$

somit entspricht $\tilde{f}(z)$ der Funktion $f(z)$ mit einer anschließenden Drehung um π im mathematisch positiven Drehsinn.

(6) $\text{Isom}(\mathcal{H}^2) = \mathcal{M} \cup \overline{\mathcal{M}}$, wobei

$$\overline{\mathcal{M}} = \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1 \right\}.$$

(7) \mathcal{M} ist die Menge der orientierungserhaltenden Isometrien, $\overline{\mathcal{M}}$ stellt die Menge der orientierungsumkehrenden Isometrien dar.

Definition 3.10 Eine Transformation von \mathcal{H}^2 heißt **konform** (conformal), falls sie winkeltreu ist. Eine Transformation heißt **anti-konform**, falls sie die absolute Winkelgröße beibehält, aber das Vorzeichen umkehrt.

Theorem 3.11 Jede Transformation in \mathcal{M} ist konform, jedes Element von $\overline{\mathcal{M}}$ ist anti-konform.

Definition 3.12 Für $M \in \mathcal{M}$, $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bzw. $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei definiert:

- (1) $\text{tr}(M) = a + d$ (Spur, trace)
- (2) $\text{Tr}(M) = |a + d|$ (Betrag der Spur)
- (3) $\text{tr}^2(M) = (a + d)^2$ (Quadrat der Spur)

Gilt $\text{Tr}(M) < 2$, so heißt M **elliptisch**. Ist $\text{Tr}(M) = 2$, so heißt M **parabolisch**. Für $\text{Tr}(M) > 2$ wird M **hyperbolisch** genannt.

Theorem 3.13

- (1) Eine Matrix in $SL(2, \mathbb{R})$ ist genau dann elliptisch, falls sie in $SL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zu einer Matrix der Gestalt $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$, $\vartheta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ist (Rotation). Der einzige Fixpunkt jeder elliptischen Transformation liegt in \mathcal{H}^2 .
- (2) Eine parabolische Transformation ist konjugiert zu einer Translation $z \mapsto z + x$, $x \in \mathbb{C}$ in $SL(2, \mathbb{R})$ und besitzt somit stets genau einen Fixpunkt auf dem Rand $\partial\mathcal{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der oberen komplexen Halbebene.
- (3) Eine Matrix in $SL(2, \mathbb{R})$ ist genau dann hyperbolisch, falls sie diagonalisierbar über \mathbb{R} ist oder in $SL(2, \mathbb{R})$ zu einer Matrix der Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 1$, konjugiert ist. Man kann auch sagen, dass jede hyperbolische Transformation in $SL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zu einer Vergrößerung (boost) $z \mapsto Nz$, $N > 1$ ist. Jede hyperbolische Transformation besitzt genau zwei Fixpunkte, die auf dem Rand $\partial\mathcal{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegen.

Für die Bestimmung einer Darstellung für Dreiecksgruppen werden die nachfolgend zusammengefassten Aussagen der hyperbolische Trigonometrie benötigt.

Definition 3.14 Für eine Teilmenge $H \subseteq \mathcal{H}^2$ definiert man den hyperbolischen Flächeninhalt durch

$$\mu(H) = \int_H \frac{dx dy}{y^2},$$

falls dieses Integral existiert.

Theorem 3.15 Der hyperbolische Flächeninhalt ist invariant unter allen Transformationen in \mathcal{M} : Ist $H \subseteq \mathcal{H}^2$ und existiert $\mu(H)$, so ist $\mu(M(H)) = \mu(H)$ für alle $M \in \mathcal{M}$.

Theorem 3.16 Sei H ein hyperbolisches Dreieck mit den Innenwinkeln α , β und γ . Dann gilt

- (1) $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.
- (2) $\mu(H) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Theorem 3.17 In einem hyperbolischen Dreieck mit den hyperbolischen Seitenlängen a , b , c und den jeweils gegenüberliegenden Winkeln α , β , γ gelten die folgenden Aussagen.

- (1) $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$ (Sinussatz)
- (2) $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ (Kosinussatz I)
- (3) $\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$ (Kosinussatz II)

3.2 Fuchssche Gruppen

Für die Definition von Dreiecksgruppen benötigt man zunächst den Begriff der *Fuchsschen Gruppe*.

Definition 3.18 ([Art98], [Bea83]) *Eine Abbildung f heißt **Homöomorphismus**, wenn sie bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.*

*Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe von Homöomorphismen von X auf sich selbst. Man sagt, G operiert **diskontinuierlich** (discontinuously) auf X , falls für jede kompakte Teilmenge K von X*

$$g(K) \cap K = \emptyset$$

für fast alle $g \in G$ gilt.

*Eine Untergruppe G von $\text{Isom}(\mathcal{H}^2)$ heißt **diskret**, falls für jede Folge $g_n \rightarrow \text{Id}$ mit $g_n \in G$ sofort $g_n = \text{Id}$ für fast alle n folgt.*

*Alternativ kann man für eine Untergruppe $G \subseteq \text{SL}(2, \mathbb{C})$ formulieren: G ist genau dann **diskret**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge*

$$\{g \in G \mid \|g\| \leq \varepsilon\}$$

endlich ist. Dabei ist die Matrixnorm durch

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$$

gegeben.

Definition 3.19 *Äquivalent zueinander kann man definieren:*

- (1) *Eine **Fuchssche Gruppe** (Fuchsian group) ist eine diskrete Untergruppe von \mathcal{M} [Kat92].*
- (2) *Eine **Fuchssche Gruppe** G ist eine Untergruppe von \mathcal{M} , für die eine G -invariante Kreisscheibe (disc) existiert, in welcher G diskontinuierlich operiert. [Bea83]*

Theorem 3.20

- (1) *Alle hyperbolischen und parabolischen zyklischen Untergruppen von \mathcal{M} sind Fuchssche Gruppen.*
- (2) *Eine elliptische zyklische Untergruppe von \mathcal{M} ist genau dann eine Fuchssche Gruppe, falls sie endlich ist.*

Definition 3.21 *X sei ein metrischer Raum, G eine Gruppe von Homöomorphismen, die diskontinuierlich auf X operiert. Eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset X$, deren Inneres mit $\text{int } F \neq \emptyset$ bezeichnet werden soll, heißt **Fundamentbereich** (fundamental region) von G , falls*

- (i) $\bigcup_{g \in G} g(F) = X$
- (ii) $\text{int } F \cap g(\text{int } F) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{\text{Id}\}$.

*Die Menge $\partial F = F \setminus \text{int } F$ heißt **Rand** (boundary) von F . Die Familie $\{g(F) \mid g \in G\}$ heißt **Parkettierung** (tessellation) von X .*

Definition 3.22 *Sei G eine Fuchssche Gruppe und $p \in \mathcal{H}^2$. p werde von keinem Element aus $G \setminus \{\text{Id}\}$ festgehalten. Dann bezeichnet*

$$D_p(G) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, g(p)) \text{ für alle } g \in G\}$$

*die **Dirichlet-Region von G bezüglich p** .³*

Theorem 3.23 *Ist G eine Fuchssche Gruppe, $p \in \mathcal{H}^2$, und wird p von keinem Element aus $G \setminus \{\text{Id}\}$ festgehalten, so ist $D_p(G)$ ein zusammenhängender Fundamentbereich von G .*

³Da die hyperbolische Metrik unter \mathcal{M} invariant ist, gilt ebenfalls

$$D_p(G) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid \rho(z, p) \leq \rho(g(z), p) \text{ für alle } g \in G\}.$$

Theorem 3.24 Die Dirichlet-Region F einer Fuchsschen Gruppe G wird begrenzt von mehreren Geodäten-Abschnitten (genannt **Seiten** des Fundamentalbereiches) und eventuell von Teilen der reellen Achse.

Sei s eine Seite von F . Ist für ein $g \in G \setminus \{\text{Id}\}$ ebenfalls $g(s)$ eine Seite von F , so nennt man s und $g(s)$ **zueinander kongruente Seiten**.

Enthält eine Seite von F ein elliptisches Element E der Ordnung 2, so vertauscht E die zwei Teilsegmente dieser Seite. Es ist zweckmäßig, die beiden Teilsegmente als einzelne Seiten von F anzusehen.

Mit dieser Konvention besitzt jede Seite von F eine zu ihr kongruente Seite. Aber es können nicht mehr als zwei Seiten paarweise zueinander kongruent sein. Somit zerfällt die Menge der Seiten von F in eine Menge kongruenter Seitenpaare. Ist die Anzahl der Seiten einer Dirichlet-Region endlich, so ist sie somit stets gerade.

Sei $\{g_n\}$ die Menge der Elemente von G , die die zueinander kongruenten Seiten einer gewählten Dirichlet-Region aufeinander abbilden. Dann erzeugt $\{g_n\}$ die Fuchssche Gruppe G .

Definition 3.25 Ist G eine Fuchssche Gruppe, dann operiert G auf \mathcal{H}^2 . Für ein Element $z \in \mathcal{H}^2$ bezeichne

$$G(z) = \{g(z) \mid g \in G\}$$

den **Orbit** des Elementes z . Man sagt, alle Elemente in $G(z)$ sind **äquivalent** unter der Operation von G .⁴ Der **Quotientenraum** (quotient space) besteht aus allen G -Orbits:⁵

$$\mathcal{H}^2/G = \{G(z) \mid z \in \mathcal{H}^2\}.$$

Theorem 3.26 Da der Flächeninhalt des Quotientenraumes \mathcal{H}^2/G für eine Fuchssche Gruppe G vom hyperbolischen Flächeninhaltsmaß in \mathcal{H}^2 induziert wird, ist die hyperbolische Fläche von \mathcal{H}^2/G wohldefiniert und es gilt

$$\mu(\mathcal{H}^2/G) = \mu(F)$$

für jeden Fundamentalbereich F von G .

Definition 3.27 Eine Fuchssche Gruppe nennt man **geometrisch endlich** (geometrically finite), falls sie einen Fundamentalbereich mit endlich vielen Seiten besitzt.

Theorem 3.28 (Siegel's Theorem) Jede Fuchssche Gruppe G mit $\mu(\mathcal{H}^2/G) < \infty$ ist geometrisch endlich.

Theorem 3.29 Jede Fuchssche Gruppe mit kompaktem Fundamentalbereich kann endlich erzeugt werden und besitzt eine Präsentation der Form

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_e, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t \mid x_1^{m_1} = \dots = x_e^{m_e} = 1, \prod_{i=1}^e x_i \prod_{j=1}^s y_j \prod_{k=1}^t z_k \prod_{l=1}^g [a_l, b_l] = 1 \rangle.$$

Weiterhin gilt für den Flächeninhalt des Fundamentalbereiches die Beziehung

$$\mu(\mathcal{H}^2/G) = 2\pi \left[2g - 2 + \sum_{i=1}^e \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + s + t \right] > 0.$$

Man sagt, eine solche Gruppe besitzt die **Signatur** $(g; m_1, \dots, m_e; s; t)$, $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_e$.

Die in der Präsentation enthaltenen Variablen haben die folgende geometrische Bedeutung:

- (1) Die Fuchssche Gruppe besitzt e Konjugiertenklassen von maximal elliptischen zyklischen Untergruppen der Ordnungen m_1, \dots, m_e .

⁴Definiert man für $z_1, z_2 \in \mathcal{H}^2$: $z_1 \equiv z_2 \Leftrightarrow \exists g \in G: g(z_1) = z_2$, so ist \equiv eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen gerade die Orbits von G sind.

⁵Allgemein ist ein Quotientenraum ein topologischer Raum, dessen Elemente die Äquivalenzklassen einer auf einem anderen topologischen Raum definierten Äquivalenzrelation darstellen.

- (2) Es gibt s Konjugiertenklassen von maximal parabolischen zyklischen Untergruppen.
- (3) Der Quotientenraum \mathcal{H}^2/G ist eine kompakte, orientierte Fläche.
- (4) Die Erzeuger a_l, b_l, x_i, y_j und z_k sind orientierungserhaltende Isometrien von \mathcal{H}^2 , die Seiten des Fundamentalbereiches aufeinander abbilden.

Theorem 3.30 (Poincaré’s Theorem) Sind $g \geq 0, e \geq 0, m_i \geq 2$ ($1 \leq i \leq e$) ganze Zahlen mit

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^e \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0,$$

so existiert eine Fuchssche Gruppe mit der Signatur $(g; m_1, \dots, m_e; 0; 0)$.

3.3 Definition und Konstruktion von Dreiecksgruppen

Im folgenden soll eine konkrete Konstruktion von Fuchsschen Dreiecksgruppen beschrieben werden, die Darstellung stützt sich dabei auf [Kat92]. Dazu werden zunächst zwei geometrische Aussagen benötigt.

Definition 3.31 Q sei eine Geodäte in \mathcal{H}^2 . Eine **hyperbolische Spiegelung** an Q ist eine von der Identität verschiedene Isometrie, die jeden Punkt von Q festhält.

Es stellt sich heraus, dass die hyperbolische Spiegelung an der imaginären Achse gerade durch die Isometrie $S: z \mapsto -\bar{z}$ realisiert wird. Eine Spiegelung an einer Geodäte Q besitzt dann die Gestalt $R^{-1} \circ S \circ R$, wobei $R \in \mathcal{M}$ diejenige Isometrie ist, die Q auf die imaginäre Achse abbildet. Damit ist sofort klar, dass jede hyperbolische Spiegelung die Ordnung 2 besitzt.

Lemma 3.32 ([Bea83]) Für alle nichtnegativen Zahlen α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ existiert ein hyperbolisches Dreieck mit den Innenwinkeln α, β, γ .

Gegeben seien drei natürliche Zahlen $p, q, r \geq 2$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Nach Lemma 3.32 existiert ein hyperbolisches Dreieck T mit den Innenwinkeln $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ an den Ecken v_1, v_2, v_3 . Die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten seien mit M_1, M_2, M_3 bezeichnet.

Die Abbildung 3.1 stellt das Dreieck T und seine Spiegelung an der Seite M_1 dar. Weiterhin sind alle im folgenden benutzten Bezeichnungen enthalten.

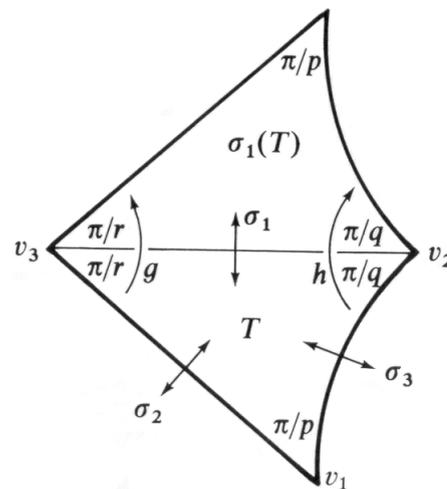


Abbildung 3.1: Fundamentalbereich der Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ (Quelle: [Bea83], S. 279)

Mit σ_i sei für $i \in \{1, 2, 3\}$ die hyperbolische Spiegelung an der Geodäte, auf der die Dreiecksseite M_i liegt, bezeichnet. G^* bezeichne die von σ_1, σ_2 und σ_3 erzeugte Gruppe. Da die σ_i orientierungsumkehrend sind, gilt $\sigma_i \notin \mathcal{M}$ und G^* ist keine Fuchssche Gruppe. Bildet man dagegen

$$G = G^* \cap \mathcal{M},$$

so gelten folgende Aussagen:

- (i) $G^* = G \dot{\cup} G\sigma_1$
- (ii) $\{g(T) \mid g \in G^*\}$ ist eine Parkettierung von \mathcal{H}^2 , d.h. jeder Punkt von \mathcal{H}^2 gehört zu einem G^* -Bild von T , und zwei verschiedene Bilder von T haben maximal Randpunkte gemeinsam.
- (iii) T ist ein Fundamentalbereich von G^* .
- (iv) Ist P ein beliebiger Punkt in T , so befinden sich die G^* -Bilder von P in den entsprechenden Dreiecken der Parkettierung, sie bilden also eine diskrete Menge. Somit ist der G -Orbit jedes Punktes von \mathcal{H}^2 eine diskrete Menge, und damit ist G eine Fuchssche Gruppe.
- (v) $T \cup \sigma_1(T)$ ist ein Fundamentalbereich von G .
- (vi) Mit der Bezeichnung $\hat{v}_1 = \sigma_1(v_1)$ erhält man, dass die Drehung $g = \sigma_1\sigma_2$ die Seite v_3v_1 auf die Seite $v_3\hat{v}_1$ abbildet. Ebenso wird durch die Drehung $h = \sigma_1\sigma_3$ die Seite v_2v_1 auf die Seite $v_2\hat{v}_1$ abgebildet.
- (vii) Die Gruppe G besitzt die Darstellung

$$G = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle,$$

dabei haben die Erzeuger die folgende geometrische Bedeutung:

$$\begin{aligned} x = \sigma_2\sigma_3 & \left(\text{Drehung um Punkt } v_1 \text{ mit Winkel } \frac{2\pi}{p} \right) \\ y = \sigma_3\sigma_1 & \left(\text{Drehung um Punkt } v_2 \text{ mit Winkel } \frac{2\pi}{q} \right) \\ z = \sigma_1\sigma_2 & \left(\text{Drehung um Punkt } v_3 \text{ mit Winkel } \frac{2\pi}{r} \right) \end{aligned}$$

- (viii) G^* heißt **erweiterte Dreiecksgruppe** und besitzt die Darstellung

$$G^* = \langle u, v, w \mid u^2 = v^2 = w^2 = (uv)^p = (vw)^q = (wu)^r = 1 \rangle,$$

dies folgt geometrisch mit $u = \sigma_2$, $v = \sigma_3$, $w = \sigma_1$.

Definition 3.33 Eine Fuchssche Gruppe mit der Signatur $(0; m_1, m_2, m_3; 0; 0)$ heißt **Dreiecksgruppe**, sie besitzt also eine Präsentation der Form

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle,$$

wobei die Exponenten die Bedingungen

$$2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3, \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$$

erfüllen.⁶

Bemerkung 3.34 Wegen $xyz = 1 \Rightarrow z = y^{-1}x^{-1}$ lässt sich die Relation $z^{m_3} = 1$ schreiben als $(y^{-1}x^{-1})^{m_3} = 1$ bzw. $(xy)^{m_3} = 1$. Somit wird im folgenden die reduzierte Präsentation

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) = \langle x, y \mid x^{m_1} = y^{m_2} = (xy)^{m_3} = 1 \rangle$$

für Dreiecksgruppen verwendet.

Im weiteren soll das Beispiel von 2.5 wieder aufgegriffen werden. Dort wurde mit GAP ermittelt, dass die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ genau zwei nicht zueinander konjugierte Epimorphismen

$$\varphi_i: \Delta(3, 5, 5) \mapsto A_5$$

⁶Es kann gezeigt werden, dass zwei Dreiecksgruppen zueinander isomorph sind, falls die Exponenten $\{m_1, m_2, m_3\}$ permutiert werden. Somit ist die Bedingung $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ keineswegs einschränkend, sondern zielt lediglich auf eine einheitliche Bezeichnung ab.

besitzt, die durch die Angabe der Bilder der Erzeuger eindeutig bestimmt sind:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= (1, 2, 3), \quad \varphi_1(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_1(xy) = (1, 3, 2, 4, 5) \quad \text{und} \\ \varphi_2(x) &= (1, 2, 4), \quad \varphi_2(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_2(xy) = (1, 3, 4, 2, 5).\end{aligned}$$

Die Kerne dieser Homomorphismen werden im folgenden mit

$$N_1 = \ker \varphi_1 \quad \text{und} \quad N_2 = \ker \varphi_2$$

bezeichnet. In dieser Fortsetzung des Beispiels soll die Fragestellung untersucht werden, ob die Normalteiler N_1 und N_2 in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind oder nicht. Obwohl der hier vorgestellte Ansatz nicht zum Ziel führt, zeigt er doch auf, wie man den Fundamentalbereich der Untergruppen von Dreiecksgruppen und die zugehörigen Seitenpaarungen bestimmen kann.

Im Korollar 2.15 wurde die Existenz von Untergruppen V_1, V_2 mit

$$\begin{aligned}N_1 &\underset{(12)}{<} V_1 \underset{(5)}{<} \Delta(3, 5, 5), \\ N_2 &\underset{(12)}{<} V_2 \underset{(5)}{<} \Delta(3, 5, 5)\end{aligned}$$

gezeigt. Es soll versucht werden, anhand dieser Untergruppen V_i bereits zu entscheiden, ob die Normalteiler N_i in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Der Vorteil eines solchen Verfahrens wäre, dass die Untergruppen V_i in $\Delta(3, 5, 5)$ einen deutlich geringeren Index als die Normalteiler N_i besitzen.

Im folgenden soll die Herangehensweise an dieses Problem geschildert werden. Dabei werden nicht die Untergruppen V_1, V_2 benutzt, die die Kenntnis der Normalteiler N_1, N_2 zwangsläufig voraussetzen, sondern die Index-5-Untergruppen U_i von $\Delta(3, 5, 5)$. Erst im späteren Verlauf wird die Zuordnung zwischen den U_i und V_j hergestellt.

In Abschnitt 2.5 wurde mit Hilfe von GAP ermittelt, dass die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ die folgenden drei Untergruppen vom Index 5 besitzt:

$$\begin{aligned}U_1 &= \langle x, xyx^{-1}, y^{-1}xy, y^2xy^{-2} \rangle \underset{(5)}{<} \Delta(3, 5, 5), \\ U_2 &= \langle x, xyx^{-1}, y^{-1}xy^{-2}, y^{-2}xy \rangle \underset{(5)}{<} \Delta(3, 5, 5), \\ U_3 &= \langle x, yx^{-1}y, y^2x^{-1}y^{-1} \rangle \underset{(5)}{<} \Delta(3, 5, 5).\end{aligned}$$

Als Rechtsnebenklassen erhält man:

$$\begin{aligned}U_1 \backslash \Delta(3, 5, 5) &= \{U_1, U_1 y, U_1 y^2, U_1 y^3, U_1 y^4\} \\ U_2 \backslash \Delta(3, 5, 5) &= \{U_2, U_2 y, U_2 y^2, U_2 y^2 x, U_2 y^2 x^2\} = \{U_2, U_2 y, U_2 y^2, U_2 y^3, U_2 y^4\}, \\ &\quad \text{da } U_2 y^3 = U_2 y^2 x \text{ und } U_2 y^4 = U_2 y^2 x^2. \\ U_3 \backslash \Delta(3, 5, 5) &= \{U_3, U_3 y, U_3 yx, U_3 yx^2, U_3 yxy\} = \{U_3, U_3 y, U_3 y^2, U_3 y^3, U_3 y^4\}, \\ &\quad \text{da } U_3 y^2 = U_3 yx, U_3 y^3 = U_3 yxy \text{ und } U_3 y^4 = U_3 yx^2.\end{aligned}$$

Es folgt also, dass alle drei Untergruppen das Rechtsnebenklassenvertretersystem $\{1, y, y^2, y^3, y^4\}$ besitzen. Zur Identifizierung der Untergruppen wird im folgenden untersucht, wie $\Delta(3, 5, 5)$ auf den Rechtsnebenklassen operiert.

1. Nummeriert man die fünf Nebenklassen von $U_1 \backslash \Delta(3, 5, 5)$ in der angegebenen Reihenfolge mit $1, \dots, 5$ durch, so operiert der Erzeuger x wie die Identität und y wie $(1, 2, 4, 5, 3)$. Wegen $\langle (1, 2, 4, 5, 3) \rangle = C_5$ operiert die Dreiecksgruppe zyklisch auf den Nebenklassen von U_1 .
2. Nummeriert man die fünf Nebenklassen von $U_2 \backslash \Delta(3, 5, 5)$ in der zuerst angegebenen Reihenfolge mit $1, \dots, 5$ durch, so operiert der Erzeuger x wie $(3, 4, 5)$ und y wie $(1, 2, 4, 5, 3)$. Wegen $\langle (3, 4, 5), (1, 2, 4, 5, 3) \rangle = A_5$ operiert die Dreiecksgruppe alternierend auf den Nebenklassen von U_2 .
3. Nummeriert man die fünf Nebenklassen von $U_3 \backslash \Delta(3, 5, 5)$ in der zuerst angegebenen Reihenfolge mit $1, \dots, 5$ durch, so operiert der Erzeuger x wie $(2, 4, 3)$ und y wie $(1, 2, 4, 5, 3)$. Wegen $\langle (2, 4, 3), (1, 2, 4, 5, 3) \rangle = A_5$ operiert die Dreiecksgruppe alternierend auf den Nebenklassen von U_3 .

Das Linksnebenklassenvertretersystem erhält man aus dem Rechtsnebenklassenvertretersystem durch Invertieren der Repräsentanten. Damit gilt für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\Delta(3, 5, 5)/U_i = \{U_i, y^{-1}U_i, y^{-2}U_i, y^{-3}U_i, y^{-4}U_i\} = \{U_i, yU_i, y^2U_i, y^3U_i, y^4U_i\}.$$

Nach [Bea83] besitzen alle Untergruppen U_i den Fundamentalbereich

$$F \cup yF \cup y^2F \cup y^3F \cup y^4F,$$

wobei F der Fundamentalbereich von $\Delta(3, 5, 5)$ ist. Abbildung 3.1 stellt mit $p = 3, q = r = 5$ den Fundamentalbereich $F = T \cup \sigma_1(T)$ dar. In Abbildung 3.2 ist der Fundamentalbereich der Untergruppen U_i dargestellt mit den im folgenden benötigten Beschriftungen der Eckpunkte und den Seitenbezeichnungen s_i für $i \in \{1, \dots, 10\}$. Daneben befindet sich die Einbettung dieses Fundamentalbereiches in das Modell \mathcal{U}^2 der hyperbolischen Ebene und die erzeugte Parkettierung. Beide Darstellungen wurden von einem eigens dafür entwickelten Computerprogramm erstellt, welches Transformationen in der hyperbolischen Geometrie ausführen kann.

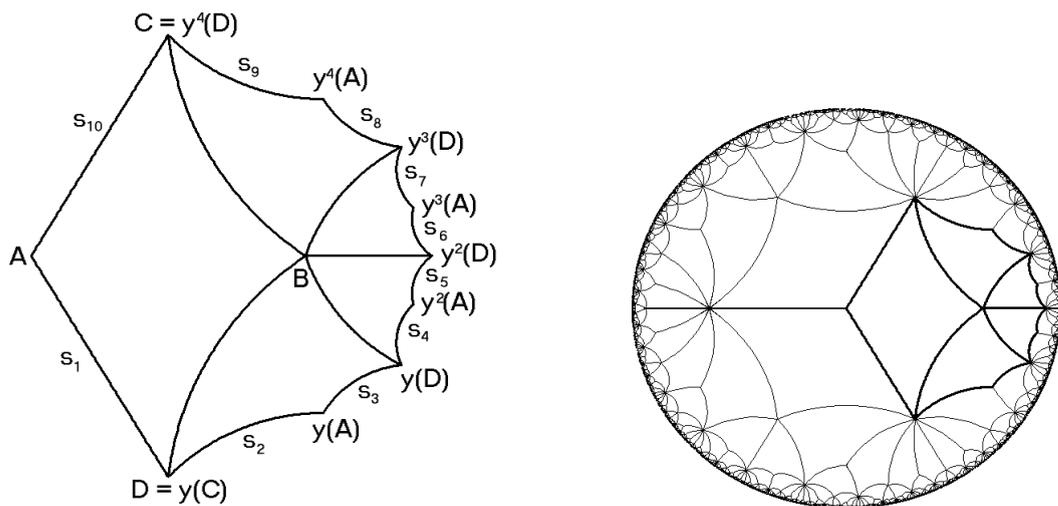


Abbildung 3.2: Zehneckiger Fundamentalbereich von U_i und induzierte Parkettierung von \mathcal{U}^2

Die drei Untergruppen U_1, U_2, U_3 besitzen zwar denselben Fundamentalbereich in der hyperbolischen Ebene, aber die Seiten müssen gemäß Theorem 3.24 auf unterschiedliche Weise miteinander identifiziert werden. Dieses Theorem gibt auch gleich einen Hinweis darauf, wie die Seitenpaarungen zu finden sind: Man betrachte die Erzeuger der Untergruppen und ihre Operation auf den Seiten.

Seitenpaarungen für U_1 .

$$U_1 = \langle x, xyx^{-1}, y^{-1}xy, y^2xy^{-2} \rangle$$

- x ist Drehung um Punkt A mit Winkel $\frac{2\pi}{3}$ im mathematisch positiven Drehsinn
- y ist Drehung um Punkt B mit Winkel $\frac{2\pi}{5}$ im mathematisch positiven Drehsinn

Aus geometrischen Überlegungen ist offensichtlich: $x(s_1) = s_{10} \Rightarrow$ Pärchen $\{s_1, s_{10}\}$. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} (yxy^{-1})(s_3) &= (yx)(s_1) = y(s_{10}) = s_2 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_2, s_3\}, \\ (y^{-1}xy)(s_9) &= (y^{-1}x)(s_1) = y^{-1}(s_{10}) = s_8 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_8, s_9\}, \\ (y^2xy^{-2})(s_5) &= (y^2x)(s_1) = y^2(s_{10}) = s_4 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_4, s_5\}, \\ (y^3xy^{-3})(s_7) &= (y^3x)(s_1) = y^3(s_{10}) = s_6 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_6, s_7\}; \end{aligned}$$

die letzte Zeile ist nur korrekt, wenn gezeigt werden kann, dass $y^3xy^{-3} \in U_1$ gilt. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} (y^2xy^{-2})^{-1} \cdot (yxy^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} \cdot (y^{-1}xy)^{-1} &= y^2x^{-1}y^{-2}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y \\ &= y^2x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y \\ &= y^3(y^{-1}x^{-1})^5xy^{-3} \\ &= y^3xy^{-3} \in U_1, \end{aligned}$$

da in der Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5) = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = (xy)^5 = 1 \rangle$ natürlich die Beziehung $(xy)^5 = 1 \Rightarrow (y^{-1}x^{-1})^5 = 1$ gilt.

Ergebnis. Für U_1 lauten die Seitenpaarungen $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_4, s_5\}$, $\{s_6, s_7\}$ und $\{s_8, s_9\}$.

Seitenpaarungen für U_2 .

$$U_2 = \langle x, yxy^{-1}, y^{-1}xy^{-2}, y^{-2}xy \rangle$$

Damit gilt auch hier $x(s_1) = s_{10} \Rightarrow$ Pärchen $\{s_1, s_{10}\}$. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} (yxy^{-1})(s_3) &= (yx)(s_1) = y(s_{10}) = s_2 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_2, s_3\}, \\ (y^{-1}xy^{-2})(s_5) &= (y^{-1}x)(s_1) = y^{-1}(s_{10}) = s_8 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_5, s_8\}, \\ (y^2xy)(s_9) &= (y^2x)(s_1) = y^2(s_{10}) = s_6 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_6, s_9\}, \\ (y^2xy^{-3})(s_7) &= (y^2x)(s_1) = y^2(s_{10}) = s_4 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_4, s_7\}; \end{aligned}$$

die letzte Zeile ist nur korrekt, wenn gezeigt werden kann, dass $y^2xy^{-3} \in U_2$ gilt. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} (y^{-1}xy^{-2})^{-1} \cdot x \cdot (yxy^{-1}) \cdot (y^{-1}xy^{-2})^{-1} \cdot (y^{-2}xy)^{-1} \cdot (y^{-1}xy^{-2}) \\ = y^2x^{-1}yxyxy^{-1}y^2x^{-1}yy^{-1}x^{-1}y^2y^{-1}xy^{-2} = y^2x^{-1}yxyxyxyxy^{-2} \\ = y^2x(xy)^5y^{-3} = y^2xy^{-3} \in U_2. \end{aligned}$$

Ergebnis. Für U_2 lauten die Seitenpaarungen $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_4, s_7\}$, $\{s_5, s_8\}$ und $\{s_6, s_9\}$.

Seitenpaarungen für U_3 .

$$U_3 = \langle x, yx^{-1}y, y^2x^{-1}y^{-1} \rangle$$

Damit gilt auch hier $x^{-1}(s_{10}) = s_1 \Rightarrow$ Pärchen $\{s_1, s_{10}\}$. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} (yx^{-1}y)(s_8) &= (yx^{-1})(s_{10}) = y(s_1) = s_3 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_3, s_8\}, \\ (y^2x^{-1}y^{-1})(s_2) &= (y^2x^{-1})(s_{10}) = y^2(s_1) = s_5 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_2, s_5\}, \\ (y^2xy)(s_9) &= (y^2x)(s_1) = y^2(s_{10}) = s_4 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_4, s_9\}, \\ (y^3x^{-1}y^2)(s_6) &= (y^3x^{-1})(s_{10}) = y^3(s_1) = s_7 \Rightarrow \text{Pärchen } \{s_6, s_7\}; \end{aligned}$$

die letzten beiden Zeilen sind nur korrekt, wenn gezeigt werden kann, dass $y^2xy, y^3x^{-1}y^2 \in U_3$ gilt. Dies ist der Fall, da

$$\begin{aligned} (y^2x^{-1}y^{-1}) \cdot (yx^{-1}y) &= y^2x^{-2}y = y^2xy \text{ und} \\ (yx^{-1}y)^{-1} \cdot (y^2x^{-1}y^{-1}) \cdot (yx^{-1}y) \cdot x \cdot (y^2x^{-1}y^{-1})^{-1} &= y^{-1}xy^{-1}y^2x^{-1}y^{-1}yx^{-1}yxyxy^{-2} \\ &= y^{-1}xyxyxyxy^{-2} = y^3(yx)^4y^{-2} = y^3x^{-1}y^{-1}y^{-2} = y^3x^{-1}y^2, \text{ da} \\ (xy)^5 = 1 \Rightarrow (yx)^4y = x^{-1} \Rightarrow (yx)^4 &= x^{-1}y^{-1} \text{ in } \Delta(3, 5, 5) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Ergebnis. Für U_3 lauten die Seitenpaarungen $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_5\}$, $\{s_3, s_8\}$, $\{s_4, s_9\}$ und $\{s_6, s_7\}$.

Korollar 3.35 Die Dreiecksgruppe $G = \Delta(3, 5, 5)$ besitzt drei in G nicht zueinander konjugierte Untergruppen U_1, U_2, U_3 vom Index 5. G operiert auf der Faktorgruppe $U_1 \setminus G$ zyklisch und auf $U_2 \setminus G$ und $U_3 \setminus G$ jeweils wie die alternierende Gruppe A_5 .

Besitzt $\Delta(3, 5, 5)$ den Fundamentalbereich F in der hyperbolischen Ebene, so besitzen diese Untergruppen U_i den Fundamentalbereich $F \cup yF \cup y^2F \cup y^3F \cup y^4F$. Bezeichnet man die Seiten dieses hyperbolischen Zehnecks wie in Abbildung 3.2 angegeben, so besteht die Menge der gemäß Theorem 3.24 kongruenten Seitenpaare

- bei U_1 aus $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_4, s_5\}$, $\{s_6, s_7\}$ und $\{s_8, s_9\}$;

- bei U_2 aus $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_4, s_7\}$, $\{s_5, s_8\}$ und $\{s_6, s_9\}$;
- bei U_3 aus $\{s_1, s_{10}\}$, $\{s_2, s_5\}$, $\{s_3, s_8\}$, $\{s_4, s_9\}$ und $\{s_6, s_7\}$.

Damit ist klar, dass die Mengengleichheit $\{V_1, V_2\} = \{U_2, U_3\}$ gilt. Die genaue Zuordnung ist für die nächsten Schritte bedeutungslos.

Diese Untersuchung der Seitenpaarungen der Fundamentalbereiche sollte eigentlich dazu genutzt werden, ein einfaches Verfahren zu entwickeln, welches entscheidet, ob die zwei Normalteiler N_1 und N_2 in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Da dieser Ansatz nicht zum Ziel führt, wird er hier nicht weiter verfolgt. Das Beispiel blieb trotzdem Bestandteil dieser Ausarbeitung, da es demonstriert, wie man die Paarungen der Seiten des Fundamentalbereichs finden kann. Zum Abschluss dieses Abschnittes soll die Grundidee des gescheiterten Ansatzes skizziert werden.

Vermutung 3.36

- (1) Es gibt keine Isometrie von \mathcal{U}^2 , die den oben konstruierten zehneckigen Fundamentalbereich von U_2 mit den U_2 -Seitenpaarungen auf den obigen Fundamentalbereich von U_3 mit den U_3 -Seitenpaarungen abbildet.
- (2) Für jeden Fundamentalbereich F_2 von U_2 und jeden Fundamentalbereich F_3 von U_3 existiert keine Isometrie von \mathcal{U}^2 , die F_2 auf F_3 inklusive Seitenpaarungen abbildet.
- (3) Es gibt kein Element $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $U_2^h = U_3$, d.h. die Untergruppen U_2, U_3 sind in $PSL(2, \mathbb{R})$ nicht konjugiert zueinander.
- (4) Die oben definierten Normalteiler N_1 und N_2 sind in $PSL(2, \mathbb{R})$ nicht konjugiert zueinander.

Beweisansätze.

- (1) Diese Aussage ist sicher noch recht leicht zu zeigen, da ein regelmäßiges Zehneck nur endlich viele Symmetrien besitzt. Es genügt nachzuweisen, dass keine dieser Symmetrien die erforderliche Bijektion der Seitenpaarungen herstellt.
- (3) Dies folgt aus (2) durch einen indirekten Beweisansatz. Gäbe es ein solches Element h , so gäbe es auch Fundamentalbereiche von U_2 und U_3 , die sich inklusive Seitenpaarungen aufeinander abbilden ließen.
- (4) Auch dieser Beweisteil müsste indirekt geführt werden und aus (3) und der Untergruppenkette von Korollar 2.15 einen Widerspruch folgern.

3.4 Darstellung von Dreiecksgruppen

In diesem Abschnitt soll die Herleitung einer Darstellung der Elemente einer konkreten Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ im Vordergrund stehen. Als Ergebnis soll eine Darstellung entstehen, die exakte und effiziente Computerberechnungen ermöglicht.

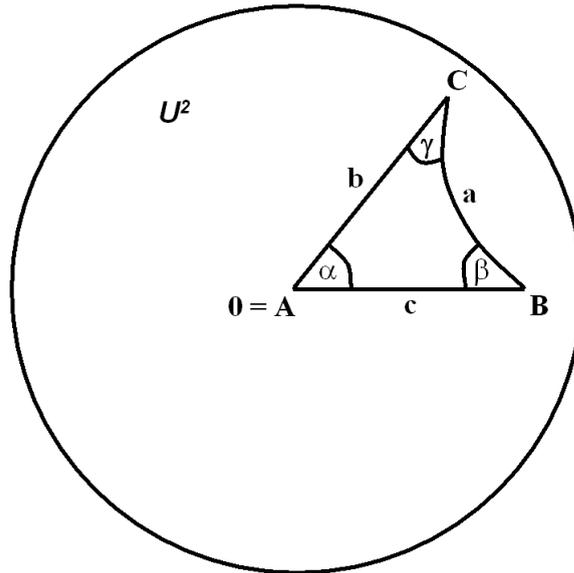
Nach dem Theorem 3.5 sind die beiden Modelle \mathcal{H}^2 und \mathcal{U}^2 für die hyperbolische Ebene isomorph zueinander. Für die nachfolgenden Berechnungen wird zunächst das Modell \mathcal{U}^2 zugrunde gelegt, zur Bildung einer effizienteren Darstellung wird später das Modell \mathcal{H}^2 verwendet.

Im folgenden soll ein hyperbolisches Dreieck ABC im Modell \mathcal{U}^2 betrachtet werden, dessen Innenwinkel die Größen

$$\alpha = \frac{\pi}{m_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{m_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{m_3}$$

besitzt; Lemma 3.32 stellt die Existenz stets sicher. Zur Bezeichnung der Eckpunkte, Dreiecksseiten und Innenwinkel wird auf Abbildung 3.3 verwiesen. In dieser Darstellung wird jeder Eckpunkt mit derjenigen komplexen Zahl identifiziert, die seine Position beschreibt. Das Dreieck wird so gewählt, dass der Eckpunkt A mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und der Eckpunkt B eine positive reelle Zahl darstellt. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach [Bea83], S. 148 für die Eckpunkte

$$A = 0, \quad B = \tanh\left(\frac{c}{2}\right), \quad C = e^{i\alpha} \tanh\left(\frac{b}{2}\right).$$


 Abbildung 3.3: Lage des Standarddreiecks in \mathcal{U}^2

Der Kosinussatz 3.17(3) ermöglicht es, die Seitenlängen b und c durch die Innenwinkel auszu-
drücken:

$$\cosh b = \frac{\cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}, \quad \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Aus der allgemeingültigen Beziehung

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} z\right) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

erhält man damit eine Darstellung von B , die nur die Innenwinkel des Dreiecks benötigt:

$$B = \tanh\left(\frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} - 1}{\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} + 1}} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma}{\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma}}.$$

Somit ist die Lage des *Standarddreiecks* für jede Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ festgelegt.

Zur Darstellung der Erzeuger der Dreiecksgruppe muss die Rotation um einen beliebigen Punkt beschrieben werden können.

Lemma 3.37

- (1) Die Isometrie von \mathcal{U}^2 , die eine Translation des Nullpunktes in einen Punkt $B \in (-1, 1)$ vermittelt, besitzt die Gestalt

$$T_{0 \rightarrow B}: \mathcal{U}^2 \mapsto \mathcal{U}^2, \quad T_{0 \rightarrow B}(z) = \frac{z + B}{Bz + 1}.$$

- (2) Die Abbildung

$$R_{0;\varphi}: \mathcal{U}^2 \mapsto \mathcal{U}^2, \quad R_{0;\varphi}(z) = e^{i\varphi} \cdot z$$

stellt eine Rotation um den Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn mit Zentrum 0 dar.

Beweis.

- (1) Da eine Translation eine orientierungserhaltende Isometrie von \mathcal{U}^2 ist, besitzt sie nach [Bea83], S. 137 die Gestalt

$$T_{0 \rightarrow B}(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}.$$

Da die zwei Fixpunkte der Translation die Punkte 1 und -1 sind, erhält man

$$\begin{aligned} T_{0 \rightarrow B}(1) = 1 &\Rightarrow a + \bar{c} = c + \bar{a} &\Rightarrow a - \bar{a} = c - \bar{c}, \\ T_{0 \rightarrow B}(-1) = -1 &\Rightarrow -a + \bar{c} = -(-c + \bar{a}) &\Rightarrow \bar{a} - a = c - \bar{c}, \end{aligned}$$

und somit gilt $a - \bar{a} = \bar{a} - a \Rightarrow a = \bar{a} \Rightarrow c = \bar{c}$. Schließlich folgt aus

$$T_{0 \rightarrow B}(0) = B \Rightarrow \frac{c}{a} = B$$

mit der Wahl $a = 1$ die Behauptung.

(2) Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Bedingungen

$$R_{0;\varphi}(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad R_{0;\varphi}(0) = 0, \quad R_{0;\varphi}(1) = e^{i\varphi}. \quad \square$$

Vereinbarung. Nach dem Theorem 3.9 (3) operiert die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ auf \mathcal{H}^2 durch

$$z \in \mathcal{H}^2, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \Rightarrow z^g = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Im folgenden wird jede Matrix $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ mit $\det g > 0$ mit der Isometrie $z \mapsto z^g = \frac{az+b}{cz+d}$ identifiziert und umgekehrt. Dies ist möglich, da die Hintereinanderausführung von Isometrien äquivalent zur Produktbildung der entsprechenden Matrizen ist. Auch wird stets stillschweigend vorausgesetzt, dass für g natürlich der entsprechende Vertreter $g^* \in PSL(2, \mathbb{R})$ zu wählen ist. So müsste man jedes $g \in GL(2, \mathbb{R})$ mit $\det g > 0$ durch $g^* = \frac{1}{\sqrt{\det g}} g I \in PSL(2, \mathbb{R})$ ersetzen.

Nach [Bea83], S. 137 besitzen die orientierungserhaltenden Isometrien von \mathcal{U}^2 die Gestalt

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

für komplexe Zahlen $a, c \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 - |c|^2 = 1$. Die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}, |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}$$

operieren natürlich auf \mathcal{U}^2 in der obigen Weise. Auch hier soll vereinbart werden, dass Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}$ (und Vielfache davon) mit den entsprechenden Isometrien identifiziert werden.

Mit Hilfe dieser Vereinbarung besitzen die Isometrien aus Lemma 3.37 die Matrixdarstellungen

$$T_{0 \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ B & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{0;\varphi}(z) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da nach der Vereinbarung alle Matrizen als Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$ angesehen werden, gilt für die Umkehrabbildung

$$T_{0 \rightarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -B \\ -B & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 3.34 wird die Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ von den Isometrien x und y erzeugt, wobei x eine Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{m_1} = 2\alpha$ mit Zentrum $A = 0$ und y eine Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{m_2} = 2\beta$ mit dem Zentrum B darstellt. Nach Lemma 3.37(2) besitzen die Erzeuger somit die Darstellungen

$$\begin{aligned} x = R_{0;2\alpha} &= \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ y = R_{B;2\beta} &= T_{0 \rightarrow B} \circ R_{0;2\beta} \circ T_{0 \rightarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ B & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2i\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -B \\ -B & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2i\beta} - B^2 & -(e^{2i\beta} - 1)B \\ (e^{2i\beta} - 1)B & 1 - e^{2i\beta} B^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das nächste Lemma vereinfacht diese Darstellungen, indem alle Matrixeinträge durch einen geeigneten Term gekürzt werden. Anschließend werden alle Überlegungen in das Modell \mathcal{H}^2 übertragen. Damit erreicht man, dass alle Matrixeinträge reelle Zahlen sind.

Lemma 3.38

(1) Die obigen Erzeuger der Dreiecksgruppe besitzen im Modell \mathcal{U}^2 die Darstellungen

$$x = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{B^2+1}{2B} + i \frac{B^2-1}{2B} \cot \beta & -1 \\ 1 & -\frac{B^2+1}{2B} + i \frac{B^2-1}{2B} \cot \beta \end{pmatrix}.$$

(2) Wendet man den Isomorphismus aus Theorem 3.5 auf die Erzeuger an, so wird die Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ in \mathcal{H}^2 erzeugt von

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta q \\ \sin \beta \frac{1}{q} & -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } q = \frac{1+B}{1-B} \text{ gilt.}$$

Beweis.

(1) Die angegebene Darstellung von x erhält man nach Division aller Matrixeinträge durch $e^{i\alpha}$. Dividiert man die Einträge von y durch $(e^{2i\beta} - 1)B$, so erhält man zunächst

$$y = \begin{pmatrix} \frac{e^{2i\beta} - B^2}{(e^{2i\beta} - 1)B} & -1 \\ 1 & \frac{1 - e^{2i\beta} B^2}{(e^{2i\beta} - 1)B} \end{pmatrix}.$$

Explizite Berechnung der Matrixeinträge führt auf

$$\begin{aligned} \frac{e^{2i\beta} - B^2}{(e^{2i\beta} - 1)B} &= \frac{\cos(2\beta) - B^2 + i \sin(2\beta)}{(\cos(2\beta) - 1)B + i B \sin(2\beta)} \\ &= \frac{[\cos(2\beta) - B^2 + i \sin(2\beta)] [(\cos(2\beta) - 1)B - i B \sin(2\beta)]}{(\cos(2\beta) - 1)^2 B^2 + B^2 \sin^2(2\beta)} \\ &= \frac{(B^2 + 1)(1 - \cos(2\beta))}{2(1 - \cos(2\beta))B} + i \frac{B^2 - 1}{2B} \frac{\sin(2\beta)}{1 - \cos(2\beta)} \\ &= \frac{B^2 + 1}{2B} + i \frac{B^2 - 1}{2B} \cot \beta, \\ \frac{1 - e^{2i\beta} B^2}{(e^{2i\beta} - 1)B} &= \frac{1 - \cos(2\beta)B^2 - i B^2 \sin(2\beta)}{(\cos(2\beta) - 1)B + i B \sin(2\beta)} \\ &= \frac{[1 - \cos(2\beta)B^2 - i B^2 \sin(2\beta)] [(\cos(2\beta) - 1)B - i B \sin(2\beta)]}{(\cos(2\beta) - 1)^2 B^2 + B^2 \sin^2(2\beta)} \\ &= \frac{(1 - \cos(2\beta))(-B^2 - 1)}{2(1 - \cos(2\beta))B^2} + i \frac{B^2 - 1}{2B} \frac{\sin(2\beta)}{1 - \cos(2\beta)} \\ &= -\frac{B^2 + 1}{2B} + i \frac{B^2 - 1}{2B} \cot \beta. \end{aligned}$$

(2) Bezeichnet $f: \mathcal{H}^2 \mapsto \mathcal{U}^2$ den Isomorphismus von Theorem 3.5 zwischen den beiden Modellen der hyperbolischen Ebene, so gilt

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad f^{-1}(z) = \frac{1 + z}{1 - z} i, \quad \text{bzw. } f = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man das hyperbolische Dreieck mit den Eckpunkten $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(C)$ in \mathcal{H}^2 , so ist $\hat{x} = f^{-1} \circ x \circ f$ eine Rotation um den Winkel 2α mit dem Zentrum $f^{-1}(A) = i$ und $\hat{y} = f^{-1} \circ y \circ f$ eine Rotation um den Winkel 2β mit dem Zentrum $f^{-1}(B)$. Man erhält

$$\hat{x} = f^{-1} \circ x \circ f = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \cos \alpha & 2i \sin \alpha \\ -2i \sin \alpha & 2i \cos \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\det(\hat{x}) = -4$. Um die Determinante 1 zu erhalten, werden alle Matrixeinträge durch $-2i$ geteilt und man erhält wie behauptet

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \hat{y} &= f^{-1} \circ y \circ f = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{B^2+1}{2B} + i \frac{B^2-1}{2B} \cot \beta & -1 \\ 1 & -\frac{B^2+1}{2B} + i \frac{B^2-1}{2B} \cot \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2i \cos \beta & 2i \sin \beta \frac{1+B}{1-B} \\ -2i \sin \beta \frac{1-B}{1+B} & 2i \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $\det(\hat{y}) = -4$. Division aller Matrixeinträge durch $-2i$ liefert die Behauptung. \square

Im folgenden wird nur noch mit dieser Darstellung der Dreiecksgruppe durch Isometrien in \mathcal{H}^2 gearbeitet; zur Einfachheit wird x statt \hat{x} und y statt \hat{y} geschrieben. Im weiteren soll untersucht werden, inwiefern die gefundene Darstellung der beiden Erzeuger für eine effiziente Computerrepräsentation von Dreiecksgruppenelementen genutzt werden kann.

Lemma 3.39 *Verwendet man für eine Fuchssche Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ die Bezeichnungen*

$$\alpha = \frac{\pi}{m_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{m_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{m_3}, \quad B = \sqrt{\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma}{\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma}}, \quad q = \frac{1 + B}{1 - B},$$

so gelten die folgenden Aussagen.

(i) *Das Element q erfüllt die Gleichung*

$$q^2 - wq + 1 = 0,$$

wobei hier und im folgenden

$$w = 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \in \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \sin \alpha, \sin \beta)$$

gesetzt wird.

(ii) *Es gilt $q^2 = wq - 1$, $\frac{1}{q} = -q + w$, $\frac{1}{q^2} = -wq + (w^2 - 1)$.*

(iii) *Das Element w erfüllt die Gleichung*

$$w^2 - 4 \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)^2}{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = 0,$$

es gilt also

$$|\mathbb{F}(w)(q) : \mathbb{F}| \leq 2 \cdot |\mathbb{F}(w) : \mathbb{F}| \leq 4,$$

falls $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ abkürzend verwendet wird.

Beweis.

(i) Setzt man abkürzend

$$u = \cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma,$$

$$v = \cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma,$$

so gilt

$$B = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad \text{und damit} \quad q = \frac{1 + B}{1 - B} = \frac{1 + \sqrt{\frac{u}{v}}}{1 - \sqrt{\frac{u}{v}}} = \frac{\sqrt{v} + \sqrt{u}}{\sqrt{v} - \sqrt{u}} = \frac{v + u + 2\sqrt{uv}}{v - u}.$$

Aus dieser Gleichheit folgt zum einen

$$\sqrt{uv} = \frac{1}{2}(q(v - u) - (v + u))$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\frac{v+u+2\sqrt{uv}}{v-u} \right)^2 = \frac{(v+u)^2 + 4uv + 4(v+u)\sqrt{uv}}{(v-u)^2} \\ &= \frac{(v+u)^2 + 4uv + 4(v+u) \cdot \frac{1}{2}(q(v-u) - (v+u))}{(v-u)^2} = \frac{-(v-u)^2 + 2(v-u)(v+u)q}{(v-u)^2} \\ q^2 &= 2 \frac{v+u}{v-u} q - 1. \end{aligned}$$

Macht man die obigen Ersetzungen für u und v wieder rückgängig, so erhält man wie behauptet

$$q^2 - 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} q + 1 = 0.$$

(ii) Die Aussagen folgen aus der Gleichung $q^2 - wq + 1 = 0$ unmittelbar:

$$\begin{aligned} q^2 &= wq - 1, \\ \frac{1}{q} &= \frac{-q^2 + wq}{q} = -q + w, \\ \frac{1}{q^2} &= \frac{-q + w}{q} = -1 + w(-q + w) = -wq + (w^2 - 1). \end{aligned}$$

(iii) Die Gültigkeit der angegebenen Gleichung folgt sofort aus Teil (i).

Ist $w \in \mathbb{F}$, so ist $|\mathbb{F}(w) : \mathbb{F}| = 1$, ansonsten ist $\mathbb{F}(w)$ eine quadratische Erweiterung von \mathbb{F} , und w besitzt das in (iii) angegebene Minimalpolynom über \mathbb{F} .

Ist $q \in \mathbb{F}(w)$, so ist $|\mathbb{F}(w)(q) : \mathbb{F}(w)| = 1$, ansonsten ist $\mathbb{F}(w)(q)$ eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{F}(w)$, und q besitzt das in (i) angegebene Minimalpolynom über $\mathbb{F}(w)$. \square

Lemma 3.40 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.39 ist die Menge*

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} A + B q & C + D q \\ -C - D \frac{1}{q} & A + B \frac{1}{q} \end{array} \right) \mid A, B, C, D \in \mathbb{F}(w) \right\}$$

multiplikativ abgeschlossen, wobei \mathbb{F} den Körper $\mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ bezeichnet.

Beweis. Im folgenden wird gezeigt, dass für beliebige $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{F}(w)$ stets

$$\left(\begin{array}{cc} A + B q & C + D q \\ -C - D \frac{1}{q} & A + B \frac{1}{q} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} E + F q & G + H q \\ -G - H \frac{1}{q} & E + F \frac{1}{q} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} I + J q & K + L q \\ -K - L \frac{1}{q} & I + J \frac{1}{q} \end{array} \right)$$

gilt, falls

$$\begin{aligned} I &= (AE - BF - CG - DH) - CH w, \\ J &= (AF + BE + CH - DG) + BF w, \\ K &= (AG - BH + CE + DF) + CF w, \\ L &= (AH + BG - CF + DE) + BH w \end{aligned}$$

gesetzt wird. Sei dafür

$$\left(\begin{array}{cc} A + B q & C + D q \\ -C - D \frac{1}{q} & A + B \frac{1}{q} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} E + F q & G + H q \\ -G - H \frac{1}{q} & E + F \frac{1}{q} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

Durch Produktbildung erhält man

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= BF q^2 + (AF + BE - DG) q - CH \frac{1}{q} + (AE - CG - DH) \\
 &\stackrel{(3.39)}{=} BF (wq - 1) + (AF + BE - DG) q - CH (-q + w) + (AE - CG - DH) \\
 &= [(AE - BF - CG - DH) - CH w] + [(AF + BE + CH - DG) + BF w] q \\
 &= I + J q \\
 P_{12} &= BH q^2 + (AH + BG + DE) q + CF \frac{1}{q} + (AG + CE + DF) \\
 &\stackrel{(3.39)}{=} BH (wq - 1) + (AH + BG + DE) q + CF (-q + w) + (AG + CE + DF) \\
 &= [(AG - BH + CE + DF) + CF w] + [(AH + BG - CF + DE) + BH w] q \\
 &= K + L q \\
 P_{21} &= -CF q - (AH + BG + DE) \frac{1}{q} - BH \frac{1}{q^2} - (AG + CE + DF) \\
 &\stackrel{(3.39)}{=} -CF (w - \frac{1}{q}) - (AH + BG + DE) \frac{1}{q} - BH (-q + w) \frac{1}{q} - (AG + CE + DF) \\
 &= -[(AG - BH + CE + DF) + CF w] - [(AH + BG - CF + DE) + BH w] \frac{1}{q} \\
 &= -K - L \frac{1}{q} \\
 P_{22} &= -CH q + (AF + BE - DG) \frac{1}{q} + BF \frac{1}{q^2} + (AE - CG - DH) \\
 &\stackrel{(3.39)}{=} -CH (w - \frac{1}{q}) + (AF + BE - DG) \frac{1}{q} + BF (-q + w) \frac{1}{q} + (AE - CG - DH) \\
 &= [(AE - BF - CG - DH) - CH w] + [(AF + BE + CH - DG) + BF w] \frac{1}{q} \\
 &= I + J \frac{1}{q} . \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 3.41 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.39 ist die Menge*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta q & c \sin \alpha + d \sin \beta q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

multiplikativ abgeschlossen, wobei \mathbb{F} den Körper $\mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ bezeichnet.

Beweis. Wegen $\mathbb{F}(w) = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \sin \alpha, \sin \beta)$ kann das Ergebnis von Lemma 3.40 in der folgenden Art und Weise benutzt werden. Belegt man die Bezeichner mit den Werten

$$\begin{aligned}
 A &= a, & B &= b \sin \alpha \sin \beta, & C &= c \sin \alpha, & D &= d \sin \beta, \\
 E &= e, & F &= f \sin \alpha \sin \beta, & G &= g \sin \alpha, & H &= h \sin \beta,
 \end{aligned}$$

so gilt auch hier

$$\begin{pmatrix} A + B q & C + D q \\ -C - D \frac{1}{q} & A + B \frac{1}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E + F q & G + H q \\ -G - H \frac{1}{q} & E + F \frac{1}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + J q & K + L q \\ -K - L \frac{1}{q} & I + J \frac{1}{q} \end{pmatrix}.$$

Zum Nachweis der Behauptung muss gezeigt werden, dass diese letzte Matrix in der Menge M

enthalten ist. Man erhält für ihre Einträge

$$\begin{aligned}
 I & \stackrel{(3.40)}{=} (AE - BF - CG - DH) - CH \ w \\
 & \stackrel{(3.39)}{=} [ae - (b \sin \alpha \sin \beta)(f \sin \alpha \sin \beta) - (c \sin \alpha)(g \sin \alpha) - (d \sin \beta)(h \sin \beta)] \\
 & \quad - (c \sin \alpha)(h \sin \beta) \cdot 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 & = ae - bf \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - cg \sin^2 \alpha - dh \sin^2 \beta - 2ch(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) \in \mathbb{F} \\
 J & \stackrel{(3.40)}{=} (AF + BE + CH - DG) + BF \ w \\
 & \stackrel{(3.39)}{=} [a(f \sin \alpha \sin \beta) + (b \sin \alpha \sin \beta)e + (c \sin \alpha)(h \sin \beta) - (d \sin \beta)(g \sin \alpha)] \\
 & \quad + (b \sin \alpha \sin \beta)(f \sin \alpha \sin \beta) \cdot 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 & = [af + be + ch - dg + 2bf(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)] \sin \alpha \sin \beta \in (\sin \alpha \sin \beta) \mathbb{F} \\
 K & \stackrel{(3.40)}{=} (AG - BH + CE + DF) + CF \ w \\
 & \stackrel{(3.39)}{=} [a(g \sin \alpha) - (b \sin \alpha \sin \beta)(h \sin \beta) + (c \sin \alpha)e + (d \sin \beta)(f \sin \alpha \sin \beta)] \\
 & \quad + (c \sin \alpha)(f \sin \alpha \sin \beta) \cdot 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 & = [ag - bh \sin^2 \beta + ce + df \sin^2 \beta + 2cf(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)] \sin \alpha \in (\sin \alpha) \mathbb{F} \\
 L & \stackrel{(3.40)}{=} (AH + BG - CF + DE) + BH \ w \\
 & \stackrel{(3.39)}{=} [a(h \sin \beta) + (b \sin \alpha \sin \beta)(g \sin \alpha) - (c \sin \alpha)(f \sin \alpha \sin \beta) + (d \sin \beta)e] \\
 & \quad + (b \sin \alpha \sin \beta)(h \sin \beta) \cdot 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 & = [ah + bg \sin^2 \alpha - cf \sin^2 \alpha + de + 2bh(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)] \sin \beta \in (\sin \beta) \mathbb{F}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Korollar 3.42 Die Fuchssche Dreiecksgruppe $G = \Delta(m_1, m_2, m_3)$ wird erzeugt von

$$x = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta \ q \\ \sin \beta \ \frac{1}{q} & -\cos \beta \end{pmatrix},$$

dabei gilt

$$q = \frac{1+B}{1-B}, \quad B = \sqrt{\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos \gamma}{\cos(\alpha-\beta) + \cos \gamma}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{m_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{m_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{m_3}.$$

Weiterhin besteht die Inklusion

$$G = \langle x, y \rangle \subset M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta \ q & c \sin \alpha + d \sin \beta \ q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \ \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \ \frac{1}{q} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

über dem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Beweis. Die Darstellung der Erzeuger folgt aus Lemma 3.38. Offensichtlich gilt $x, y \in M$. Da M nach Lemma 3.41 multiplikativ abgeschlossen ist, liegt auch jedes endliche Produkt von x - und y -Potenzen in M . Wegen $x^{-1} = x^{m_1-1}$ und $y^{-1} = y^{m_2-1}$ gilt $\Delta(m_1, m_2, m_3) \subset M$. \square

Lemma 3.43 Sei G die Fuchssche Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$.

(i) Für jedes Element $g \in G$ gilt $\text{tr}(g) \in \mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

(ii) Die Menge $\text{tr}(G)$ ist enthalten im Ring $\mathbb{Z}[2, 2 \cos \alpha, 2 \cos \beta, 2 \cos \gamma]$, der von $\{2, 2 \cos \alpha, 2 \cos \beta, 2 \cos \gamma\}$ über \mathbb{Z} erzeugt wird. Weiterhin gilt $\mathbb{Q}(\text{tr}(g) \mid g \in G) = \mathbb{F}$.

Beweis.

(i) Nach dem Korollar 3.42 gilt $g \in M$. Somit existieren $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ mit

$$g = \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta \ q & c \sin \alpha + d \sin \beta \ q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \ \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \ \frac{1}{q} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(g) &= 2a + b \sin \alpha \sin \beta \left(q + \frac{1}{q} \right) \stackrel{(3.39)}{=} 2a + b \sin \alpha \sin \beta \cdot 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \\ &= 2a + 2b(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

- (ii) Eine Skizze dieses Beweises befindet sich in [Tak77a], S. 95, der auf eine Erwähnung dieser Aussage in [Mag74], S. 148 verweist. Auch Svetlana Katok zitiert in [Kat92], S. 154 diese Behauptung. \square

Das Korollar 3.42 ermöglicht eine effektive Computer-Darstellung von Dreiecksgruppenelementen. Dabei wird ein $g \in \Delta(m_1, m_2, m_3)$ durch vier Elemente $a, b, c, d \in \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ in der folgenden Art und Weise repräsentiert:

$$g = [a, b, c, d] = \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta q & c \sin \alpha + d \sin \beta q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix}.$$

Da α, β und γ jeweils die Gestalt $\frac{\pi}{n}$ für natürliches n besitzen, und $\cos \frac{\pi}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ algebraisch über \mathbb{Q} ist [Rei96], ist $\mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{Q} . Somit lässt sich jedes $g \in \Delta(m_1, m_2, m_3)$ durch endlich viele rationale Zahlen exakt darstellen. Nach Korollar 3.42 besitzen die Erzeuger in der obigen Notation die Darstellungen

$$x = [-\cos \alpha, 0, -1, 0], \quad y = [-\cos \beta, 0, 0, -1];$$

die Multiplikation lässt sich gemäß Lemma 3.41 durch

$$\begin{aligned} [a, b, c, d][e, f, g, h] &= [ae - bf \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - cg \sin^2 \alpha - dh \sin^2 \beta - 2ch(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma), \\ &\quad af + be + ch - dg + 2bf(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma), \\ &\quad ag - bh \sin^2 \beta + ce + df \sin^2 \beta + 2cf(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma), \\ &\quad ah + bg \sin^2 \alpha - cf \sin^2 \alpha + de + 2bh(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)] \end{aligned}$$

beschreiben. Wegen $x^{-1} = x^{m_1-1}$ und $y^{-1} = y^{m_2-1}$ lässt sich jedes Element als endliches Produkt von x - und y -Potenzen darstellen, wobei alle Exponenten aus einem bestimmten Bereich gewählt werden können:

$$g = \prod_{i=1}^r x^{s_i} y^{t_i} \quad \text{mit } s_i \in \{0, \dots, m_1\}, t_i \in \{0, \dots, m_2\}.$$

Die Bestimmung der Darstellung eines solchen konkreten Elements der Dreiecksgruppe erfolgt durch Nachvollziehung der Produktbildung der entsprechenden Darstellungen der Erzeuger x und y . Für eine Optimierung der Berechnungszeit können die Darstellungen der Potenzen x^i, y^j für $i \in \{0, \dots, m_1\}$ und $j \in \{0, \dots, m_2\}$ vorausberechnet werden.

Nach Lemma 3.43 erfolgt die Berechnung der Spur eines Elementes nach der Vorschrift

$$\operatorname{tr}([a, b, c, d]) = 2a + 2b(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma).$$

Mit Hilfe dieser Bemerkungen ist es möglich, für in Produktdarstellung gegebene Elemente von $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ die exakte Spurberechnung relativ effizient durchzuführen.

3.5 Quaternionen-Algebren

In diesem Abschnitt soll nachgewiesen werden, dass die oben hergeleitete Multiplikation von Dreiecksgruppenelementen als Multiplikation in einer speziellen Quaternionenalgebra aufgefasst werden kann. Dazu soll zunächst der Begriff einer Quaternionenalgebra erarbeitet werden, die Darstellung stützt sich dabei weitgehend auf [Far01].

Definition 3.44 Ein assoziativer Ring A heißt **Algebra** über einem Körper \mathbb{F} , falls A ein Vektorraum über \mathbb{F} ist, der eine assoziative Multiplikation besitzt, die

$$(\lambda a)(b) = a(\lambda b) = \lambda(ab)$$

für alle $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{F}$ erfüllt. Eine Algebra A heißt **kommutativ**, falls

$$ab = ba \quad \text{für alle } a, b \in A \text{ gilt.}$$

Eine Algebra besitzt ein **multiplikatives Einselement**, falls ein Element $1 \in A$ mit

$$a1 = 1a = a \quad \text{für alle } a \in A$$

existiert. Ein **Ideal** einer Algebra A ist eine Teilmenge $I \subseteq A$, die selbst wieder eine Algebra ist und für die

$$az \in I, \quad za \in I$$

für alle $a \in A$ und $z \in I$ gilt. Ein **echtes Ideal** ist ein Ideal I von A mit $I \neq A$. Eine Algebra A heißt **einfach**, falls

- (i) $\{ab \mid a, b \in A\} \neq \{0\}$ und
- (ii) das einzige echte Ideal von A das Nullideal $I = \{0\}$ ist.

Das **Zentrum** einer Algebra A ist definiert durch

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ für alle } b \in A\}.$$

Eine Algebra heißt **zentral**, falls

$$Z(A) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{F}\}.$$

Eine **Divisionsalgebra** ist eine Algebra mit multiplikativem Einselement, in welcher jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist.

\mathbb{F} sei ein Körper mit $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. Eine **Quaternionenalgebra** über \mathbb{F} ist eine einfache, zentrale Algebra A mit $\dim_{\mathbb{F}}(A) = 4$.

Theorem 3.45 Jede Quaternionenalgebra ist isomorph zu einer Algebra A mit Basis $\{1, i, j, k\}$ mit

$$i^2 = -a \cdot 1, \quad j^2 = -b \cdot 1, \quad k = ij = -ji,$$

dabei sind $a, b \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Als Schreibweise wird üblicherweise das **Hilbertsymbol**

$$A = \left(\frac{a, b}{\mathbb{F}} \right)$$

verwendet.

Definition 3.46 Als Quaternionenalgebra von W.R. Hamilton sei

$$\mathbb{H} = \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}} \right)$$

bezeichnet. Die Matrix-Algebra $M(2, \mathbb{F})$ besteht aus allen 2×2 -Matrizen mit Einträgen aus dem Körper \mathbb{F} mit der üblichen Matrix-Addition und Multiplikation. Sie ist stets isomorph zu $\left(\frac{1, 1}{\mathbb{F}} \right)$.⁷

Theorem 3.47

- (1) Ist $a \in (\mathbb{F}^*)^2$, so gilt $\left(\frac{a, b}{\mathbb{F}} \right) \cong M(2, \mathbb{F})$.
- (2) Für alle $x, y \in \mathbb{F}^*$ gilt $\left(\frac{ax^2, by^2}{\mathbb{F}} \right) \cong \left(\frac{a, b}{\mathbb{F}} \right)$.
- (3) Wegen (2) gibt es über $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nur zwei zueinander nicht isomorphe Quaternionenalgebren:

$$\left(\frac{a, b}{\mathbb{R}} \right) \cong \left(\frac{1, 1}{\mathbb{R}} \right) \cong \left(\frac{1, -1}{\mathbb{R}} \right) \cong M(2, \mathbb{R}) \text{ oder } \left(\frac{a, b}{\mathbb{R}} \right) \cong \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}} \right) \cong \mathbb{H}.$$

⁷Dazu setze man beispielsweise

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.48 Sei \mathbb{F} ein Unterkörper von \mathbb{R} , $Q_{\mathbb{F}} = \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{F}}\right)$ die Hamilton-Quaternionenalgebra über \mathbb{F} . Jedes Element $z_0 \mathbf{1} + z_1 i + z_2 j + z_3 k \in Q_{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$ ist invertierbar und es gilt

$$(z_0 \mathbf{1} + z_1 i + z_2 j + z_3 k)^{-1} = \left(\sum_{t=0}^3 z_t^2\right)^{-1} (z_0 \mathbf{1} - z_1 i - z_2 j - z_3 k).$$

Definition 3.49 Sei $A = \left(\frac{a, b}{\mathbb{F}}\right)$ eine Quaternionenalgebra über dem Körper \mathbb{F} . Sei $\iota: A \rightarrow A$ die **Standard-Involution** von A , die durch

$$\iota(x) = \bar{x}, \quad \iota(x_0 \mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0 \mathbf{1} - x_1 i - x_2 j - x_3 k$$

definiert ist, wobei \bar{x} das zu $x \in A$ **konjugierte Element** ist. Dann heißt

$$\text{Trd}: A \rightarrow \mathbb{F}, \quad \text{Trd}(x_0 \mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = 2x_0$$

reduzierte Spur (reduced trace) und

$$\text{Nrd}: A \rightarrow \mathbb{F}, \quad \text{Nrd}(x_0 \mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0^2 - x_1^2 a - x_2^2 b + x_3^2 ab$$

reduzierte Norm von $x \in A$.

Bemerkung 3.50

(1) Ist $\nu: A \rightarrow \mathbb{F}$ die Projektion $\nu(x_0 \mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0$, so gilt $\text{Trd}(x) = \nu(x + \bar{x})$ und $\text{Nrd}(x) = \nu(x \cdot \bar{x})$.

(2) Definiert man einen Homomorphismus $\varphi: A \rightarrow M(2, F(\sqrt{a}))$ durch folgende Festlegung auf den Basiselementen von A :

$$\varphi: \mathbf{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix},$$

so besitzt ein Element $x = x_0 \mathbf{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in A$ das Bild

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \sqrt{a} & x_2 + x_3 \sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3 \sqrt{a}) & x_0 - x_1 \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Die vier Matrizen $\varphi(\mathbf{1}), \varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)$ sind linear unabhängig und es gilt $\varphi(i^2) = \varphi(a)$, $\varphi(j^2) = \varphi(b)$, $\varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i)$. Man erhält, dass φ einen Isomorphismus zwischen der Algebra A und einer \mathbb{F} -Unteralgebra von $M(2, F(\sqrt{a}))$ darstellt.

Aus der Gültigkeit der Beziehungen

$$\text{Trd}(x) = \text{tr}(\varphi(x)) \quad \text{und} \quad \text{Nrd}(x) = \det(\varphi(x))$$

rührt die Benennung der Funktionen Trd und Nrd .

Bevor das Rechnen in Dreiecksgruppen auf Quaternionenmultiplikationen zurückgeführt werden kann, muss zunächst gezeigt werden, dass jede Dreiecksgruppe auf natürliche Art und Weise in einer Quaternionenalgebra enthalten ist. Interessanterweise stellt sich heraus, dass die im letzten Abschnitt hergeleitete Obermenge M bereits diese Quaternionenalgebra ist. Nach Korollar 3.42 besteht die Inklusion

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) \subset M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta q & c \sin \alpha + d \sin \beta q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

für den Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Man sieht leicht, dass M eine Algebra mit der Basis

$$\{I, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sin \alpha \sin \beta \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}, \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sin \beta \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

über dem Körper \mathbb{F} ist. Im folgenden soll gezeigt werden, dass M eine Quaternionenalgebra ist. Nach Theorem 3.45 muss dazu die Isomorphie zu einer Algebra A mit Basis $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$ mit

$$i^2 = a \mathbf{1}, \quad j^2 = b \mathbf{1}, \quad k = ij = -ji,$$

für $a, b \in \mathbb{F}$ nachgewiesen werden. Setzt man

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{w} & 1 & -\sin^2\beta & \tilde{w} \\ -\tilde{w} & 1 & 1 & 0 \\ \tilde{w}^2 & -\tilde{w} & -\tilde{w} & -\tilde{w}^2 + \sin^2\alpha(1 + \sin^2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

wobei abkürzend $\tilde{w} = \frac{1}{2} \sin\alpha \sin\beta w = \cos\alpha \cos\beta + \cos\gamma$ gesetzt wurde, so gilt

$$\begin{aligned} i^2 &= [(1 + \sin^2\beta)(\tilde{w}^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta)] \mathbf{1} \in \mathbb{F} \mathbf{1} \\ j^2 &= [\tilde{w}^2 - \sin^2\alpha(1 + \sin^2\beta)] \mathbf{1} \in \mathbb{F} \mathbf{1}, \\ ij &= k = -ji. \end{aligned}$$

Die oben angegebene Transformationsmatrix besitzt die Determinante

$$\begin{aligned} &(1 + \sin^2\beta)(-\tilde{w}^2 + \sin^2\alpha(1 + \sin^2\beta)) \\ &= (1 + \sin^2\beta)(2 - 2\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma). \end{aligned}$$

Ist diese Determinante von Null verschieden, so bildet $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$ eine Basis einer Algebra A , die isomorph zu M ist. Damit ist M eine Quaternionenalgebra, falls

$$2 - 2\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \neq 0.$$

Bemerkung 3.51 Die oben angegebene Belegung für die Basiselemente von A erhält man aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ m & n & p & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, p, r \in \mathbb{F},$$

und den zu erfüllenden Bedingungen

- (1) $i^2 \in \mathbb{F}$,
- (2) $j^2 \in \mathbb{F}$,
- (3) $ij = k$,
- (4) $ji = -k$.

Durch Einsetzen erhält man aus den Bedingungen im einzelnen:

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow b(a + b\tilde{w}) = c(a + b\tilde{w}) = d(a + b\tilde{w}) = 0 \\ (2) &\Rightarrow f(e + f\tilde{w}) = g(e + f\tilde{w}) = h(e + f\tilde{w}) = 0 \\ (3) &\Rightarrow m = ae - \sin^2\alpha \sin^2\beta bf - \sin^2\alpha cg - 2\tilde{w}ch - \sin^2\beta dh \\ &\quad n = af + be + 2\tilde{w}bf + ch - dg \\ &\quad p = ag - \sin^2\beta bh + ce + 2\tilde{w}cf + \sin^2\beta df \\ &\quad r = ah + \sin^2\alpha bg + 2\tilde{w}bh - \sin^2\alpha cf + de \\ (4) &\Rightarrow -m = ae - \sin^2\alpha \sin^2\beta bf - \sin^2\alpha cg - 2\tilde{w}gd - \sin^2\beta dh \\ &\quad -n = be + af + 2\tilde{w}bf + dg - ch \\ &\quad -p = ce - \sin^2\beta df + ag + 2\tilde{w}bg + \sin^2\beta bh \\ &\quad -r = de + \sin^2\alpha cf + 2\tilde{w}df - \sin^2\alpha bg + ah \end{aligned}$$

Wählt man dann

$$a = -b\tilde{w}, \quad e = -f\tilde{w},$$

so gelten alle obigen Bedingungen, falls die Gleichung

$$(\tilde{w}^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta)bf + (\cos^2\alpha - 1)cg + (\cos^2\beta - 1)dh - \tilde{w}(ch + gd) = 0$$

erfüllt ist. Diese Beziehung ist beispielsweise für

$$bf = 1, \quad cg = \cos^2 \beta - 1, \quad dh = 0, \quad ch + gd = \tilde{w},$$

wahr und damit erhält man die oben angegebene Belegung der Variablen, die alle Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} a &= -\tilde{w}, & b &= 1, & c &= -\sin^2 \beta, & d &= \tilde{w}, \\ e &= -\tilde{w}, & f &= 1, & g &= 1, & h &= 0, \\ m &= \tilde{w}^2, & n &= -\tilde{w}, & p &= -\tilde{w}, & r &= -\tilde{w}^2 + \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta). \end{aligned}$$

Das folgende Lemma klärt die Frage, für welche Dreiecksgruppen $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ die obige Determinante

$$(1 + \sin^2 \beta) (2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

von Null verschieden ist. Da der erste Faktor stets positiv ist, genügt natürlich eine Betrachtung des zweiten.

Lemma 3.52 *Definiert man für natürliche Zahlen $m_1, m_2, m_3 \geq 2$ die Funktion*

$$\begin{aligned} \text{Det}(m_1, m_2, m_3) &= 2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &\text{mit } \alpha = \frac{\pi}{m_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{m_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{m_3}, \end{aligned}$$

so wird der Funktionswert 0 genau für die drei Tripel

$$(m_1, m_2, m_3) \in \{(3, 4, 4), (6, 2, 4), (6, 4, 2)\}$$

angenommen.

Beweis. Die Funktion Det ist symmetrisch in m_2 und m_3 , es kann also im folgenden $m_2 \leq m_3$ angenommen werden. Der Beweis wird in mehreren Teilschritten geführt.

1. Zuerst wird gezeigt: Ist $m_1 > 6$, so ist $\text{Det}(m_1, m_2, m_3) \neq 0$. Dies wird durch die Betrachtung von vier Einzelfällen nachgewiesen.

- (a) $\mathbf{m_1 > 6, m_2 = 2, m_3 = 2}$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(m_1, 2, 2) = 2 \sin^2 \alpha > 0 \text{ für } m_1 > 6.$$

- (b) $\mathbf{m_1 > 6, m_2 = 2, m_3 = 3}$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(m_1, 2, 3) = 2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{4}.$$

Diese Funktion besitzt für $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ nur die Nullstelle $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{7}\sqrt{7}\right)$, die nicht die geforderte Form $\frac{\pi}{m_1}$ besitzt.

- (c) $\mathbf{m_1 > 6, m_2 = 2, m_3 \geq 4}$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(m_1, 2, m_3) = -2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma + 2.$$

Aus

$$\begin{aligned} m_1 > 6 &\Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \alpha > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -\cos^2 \alpha < -\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ und} \\ m_3 \geq 4 &\Rightarrow \gamma \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \gamma \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\cos^2 \gamma \leq -\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

folgt damit

$$\text{Det}(m_1, 2, m_3) < -2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0.$$

(d) $\mathbf{m}_1 > 6, \mathbf{m}_2 \geq 3$. Wegen

$$\begin{aligned} m_1 > 6 &\Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \alpha > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ m_2 > 3 &\Rightarrow \beta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \beta > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ und} \\ m_3 \geq m_2 &\Rightarrow \gamma \leq \beta \Rightarrow \cos \gamma \geq \cos \beta \end{aligned}$$

gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \text{Det}(m_1, m_2, m_3) &= 2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &< 2 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos \beta \cos \gamma \\ &= -\cos^2 \beta - \sqrt{3} \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \gamma + \frac{1}{2} \\ &\leq -\cos^2 \beta - \sqrt{3} \cos^2 \beta - \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - (\sqrt{3} + 2) \cos^2 \beta \\ &\leq \frac{1}{2} - (\sqrt{3} + 2) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{3} < 0. \end{aligned}$$

2. Nun wird gezeigt: Ist $m_3 > 4$, so ist $\text{Det}(m_1, m_2, m_3) \neq 0$. Auch dies wird durch die Betrachtung von mehreren Fällen nachgewiesen.

(a) $\mathbf{m}_1 = 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(2, m_2, m_3) = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 0.$$

(b) $\mathbf{m}_1 = 3, \mathbf{m}_2 = 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(3, 2, m_3) = \frac{3}{2} - \cos^2 \gamma > 0.$$

(c) $\mathbf{m}_1 = 3, \mathbf{m}_2 = 3, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(3, 3, m_3) = -\cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \cos \gamma + \frac{5}{4}.$$

Diese Funktion besitzt für $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$ nur die Nullstelle $\gamma = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{4}(\sqrt{21} - 1)\right)$, die nicht die geforderte Form $\frac{\pi}{m_3}$ besitzt.

(d) $\mathbf{m}_1 = 3, \mathbf{m}_2 = 4, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(3, 4, m_3) = -\cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \gamma + 1.$$

Diese Funktion besitzt für $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$ keine Nullstelle.

(e) $\mathbf{m}_1 = 4, \mathbf{m}_2 = 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(4, 2, m_3) = \sin^2 \gamma > 0.$$

(f) $\mathbf{m}_1 = 5, \mathbf{m}_2 = 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(5, 2, m_3) = \sin^2 \gamma - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Diese Funktion besitzt für $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$ nur die Nullstelle $\gamma = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt[4]{5}$, die nicht die geforderte Form $\frac{\pi}{m_3}$ besitzt.

(g) $\mathbf{m}_1 = 6, \mathbf{m}_2 = 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\text{Det}(6, 2, m_3) = \frac{1}{2} - \cos^2 \gamma.$$

Diese Funktion besitzt für $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$ keine Nullstelle.

Für die noch ausstehenden Fälle erhält man aus

$$m_3 > 4 \Rightarrow \gamma < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \gamma > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

sofort

$$\begin{aligned} & \text{Det}(m_1, m_2, m_3) \\ &= 2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &< 2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -2 \cos^2 \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta - \cos^2 \beta + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \alpha + \cos \beta\right)^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} \sqrt{6} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \alpha + \cos \beta\right) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{6} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \alpha + \cos \beta\right) \end{aligned}$$

In jedem der nächsten Fälle soll gezeigt werden, dass das letzte Produkt stets positiv ist, so dass durch das davorstehende Minuszeichen $\text{Det}(m_1, m_2, m_3) < 0$ gilt. Da der erste Faktor stets positiv ist, bleibt nur zu zeigen, dass der zweite Faktor

$$P = -\frac{1}{2} \sqrt{6} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \beta$$

ebenfalls stets positiv ist.

(h) $\mathbf{m}_1 = 3, \mathbf{m}_2 > 4, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$P = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \beta = \cos \beta - \frac{1}{2} \sqrt{2} > 0 \text{ für } \beta < \frac{\pi}{4}.$$

(i) $\mathbf{m}_1 = 4, \mathbf{m}_2 > 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$P = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \beta = \cos \beta - \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0 \text{ für } \beta < 1.196 > \frac{\pi}{3}.$$

(j) $\mathbf{m}_1 = 5, \mathbf{m}_2 > 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$P = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \beta = \cos \beta - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{30}\right) > 0 \text{ für } \beta < 1.42242 > \frac{\pi}{3}.$$

(k) $\mathbf{m}_1 = 6, \mathbf{m}_2 > 2, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$P = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \beta = \cos \beta > 0 \text{ für } \beta < \frac{\pi}{2}.$$

(l) $\mathbf{m}_1 > 6, \mathbf{m}_3 > 4$. In diesem Fall gilt

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) > 0 \text{ und damit } P > 0.$$

3. Bisher wurde gezeigt, dass für $m_1 > 6$ oder $m_3 > 4$ die Funktion Det keine Nullstelle besitzt. Dies gilt auch für $m_2 > 4$, da in diesem Fall wegen $m_2 \leq m_3$ ebenfalls $m_3 > 4$ folgen würde. Damit bleiben die 30 Fälle

$$\{(m_1, m_2, m_3) \mid 2 \leq m_1 \leq 6, 2 \leq m_2 \leq m_3 \leq 4\}$$

noch zu betrachten, unter denen genau die beiden Tripel $(3, 4, 4)$ und $(6, 2, 4)$ Nullstellen von Det erzeugen. Hebt man die Symmetriebedingung $m_2 \leq m_3$ auf, so ist auch $(6, 4, 2)$ eine Lösung. \square

Das folgende Lemma weist nach, dass auch für die drei in diesem Lemma aufgetretenen Ausnahmefälle zu M isomorphe Quaternionenalgebren angegeben werden können.

Lemma 3.53 Die den Dreiecksgruppen $\Delta(3, 4, 4)$, $\Delta(6, 2, 4)$ bzw. $(6, 4, 2)$ zugeordneten Algebren M sind isomorph zu

$$\left(\frac{\tilde{a}, \tilde{b}}{\mathbb{F}} \right),$$

wobei

1. für $\Delta(3, 4, 4)$:

$$\tilde{a} = -\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{3}{2}(9\sqrt{2} - 7);$$

2. für $\Delta(6, 2, 4)$:

$$\tilde{a} = -(\sqrt{2} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{1}{9}(\sqrt{2} + 1);$$

3. für $\Delta(6, 4, 2)$:

$$\tilde{a} = -\frac{1}{2}(\sqrt{6} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1)$$

gilt.

Beweis. Für diese drei Dreiecksgruppen wurde prinzipiell der gleiche Ansatz für die Herleitung der Isomorphie von M zu einer Quaternionenalgebra verwendet wie für den obigen allgemeinen Fall $\Delta(m_1, m_2, m_3)$. In der Bemerkung 3.51 wurden aus

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ m & n & p & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, p, r \in \mathbb{F},$$

und den zu erfüllenden Bedingungen schließlich die Gleichungen

$$(\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)bf + (\cos^2 \alpha - 1)cg + (\cos^2 \beta - 1)dh - \tilde{w}(ch + gd) = 0,$$

$$a = -b\tilde{w}, \quad e = -f\tilde{w},$$

$$m = ae - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta bf - \sin^2 \alpha cg - 2\tilde{w}ch - \sin^2 \beta dh$$

$$n = af + be + 2\tilde{w}bf + ch - dg$$

$$p = ag - \sin^2 \beta bh + ce + 2\tilde{w}cf + \sin^2 \beta df$$

$$r = ah + \sin^2 \alpha bg + 2\tilde{w}bh - \sin^2 \alpha cf + de$$

abgeleitet. Für alle drei Dreiecksgruppen wird hier

$$b = c = d = f = 1, \quad h = -g$$

gesetzt, die restlichen Variablen sind damit eindeutig festgelegt. Im einzelnen erhält man:

1. Für $\Delta(3, 4, 4)$:

$$\mathbb{F} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad \tilde{w} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Die eindeutige Lösung des obigen Gleichungssystems resultiert in

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{2} & 1 & 3 & -3 \\ \frac{9}{2}\sqrt{2} & -6 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

dabei hat die Matrix die Determinante $47 - 12\sqrt{2}$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned} i &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ j &= \begin{pmatrix} -3 + \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{6}) & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 - \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{6}) & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ k &= ij = -ji. \end{aligned}$$

Damit gilt wie behauptet

$$i^2 = -\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + 1) \mathbf{1}, \quad j^2 = \frac{3}{2}(9\sqrt{2} - 7) \mathbf{1}.$$

2. Für $\Delta(6, 2, 4)$:

$$\mathbb{F} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad \tilde{w} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die eindeutige Lösung des obigen Gleichungssystems resultiert in

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}(\sqrt{2} + 1) & -\frac{1}{3}(\sqrt{2} + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

dabei hat die Matrix die Determinante $\frac{4}{9}(2\sqrt{2} + 3)$. Weiterhin erhält man

$$i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6}(1 + 2\sqrt{2}) \\ \frac{1}{6}(3 - 2\sqrt{2}) & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad k = ij = -ji.$$

Damit gilt wie behauptet

$$i^2 = -(\sqrt{2} + 1) \mathbf{1}, \quad j^2 = \frac{1}{9}(\sqrt{2} + 1) \mathbf{1}.$$

3. Für $\Delta(6, 4, 2)$:

$$\mathbb{F} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad \tilde{w} = \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

Die eindeutige Lösung des obigen Gleichungssystems resultiert in

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} & 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} & 2 & \frac{1}{2}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

dabei hat die Matrix die Determinante 5. Weiterhin erhält man

$$i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(3 + \sqrt{6}) \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{6}) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{6}) \\ \frac{1}{2}(3 - \sqrt{6}) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Damit gilt wie behauptet

$$i^2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{6} + 1) \mathbf{1}, \quad j^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1) \mathbf{1}. \quad \square$$

Bemerkung 3.54 Im vorangehenden Lemma 3.53 wird zum Lösen des Gleichungssystems

$$b = c = d = f = 1, h = -g$$

gesetzt. Diese Wahl der Variablen kann nicht für den allgemeinen Fall $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ verwendet werden, da das Gleichungssystem für $m_1 = m_2$ im allgemeinen keine Lösung besitzt. Gilt nämlich $\alpha = \beta$, so folgt aus

$$(\tilde{w}^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta)bf + (\cos^2\alpha - 1)cg + (\cos^2\beta - 1)dh - \tilde{w}(ch + gd) = 0$$

mit den obigen Variablenbelegungen sofort

$$\cos^2\alpha(2\cos\gamma + 2) + \cos^2\gamma - 1 = 0$$

als zwingende Bedingung für die Lösbarkeit des Systems.

Korollar 3.55 Sei $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ eine Fuchssche Dreiecksgruppe. Dann ist die zugehörige Algebra M für

$$(m_1, m_2, m_3) \notin \{(3, 4, 4), (6, 2, 4), (6, 4, 2)\}$$

isomorph zu

$$A = \left(\frac{\tilde{a}, \tilde{b}}{\mathbb{F}} \right), \text{ mit } \tilde{a} = (2 - \cos^2 \beta)D, \tilde{b} = D - \sin^2 \alpha,$$

$$D = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1.$$

Für die drei Sonderfälle besteht ebenfalls Isomorphie, allerdings besitzen dann die Parameter die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \Delta(3, 4, 4): \quad & \tilde{a} = -\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{3}{2}(9\sqrt{2} - 7); \\ \Delta(6, 2, 4): \quad & \tilde{a} = -(\sqrt{2} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{1}{9}(\sqrt{2} + 1); \\ \Delta(6, 4, 2): \quad & \tilde{a} = -\frac{1}{2}(\sqrt{6} + 1), \quad \tilde{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1). \end{aligned}$$

Beweis. Im Normalfall erhält man die Terme für \tilde{a} und \tilde{b} aus den Ausdrücken für i^2 und j^2 der obigen Herleitung

$$\begin{aligned} i^2 &= [(1 + \sin^2 \beta)(\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)] \mathbf{1}, \\ j^2 &= [\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta)] \mathbf{1}, \end{aligned}$$

wenn \tilde{w} durch $\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma$ ersetzt wird. Die Isomorphie der Algebren wurde oben nachgewiesen. Im Lemma 3.52 wurde gezeigt, dass die auftretende Determinante der Transformationsmatrix für den Normalfall stets von Null verschieden ist und damit $\tilde{b} \neq 0$ gilt. Die drei Sonderfälle $\Delta(3, 4, 4)$, $\Delta(6, 2, 4)$ und $\Delta(6, 4, 2)$ wurden im Lemma 3.53 behandelt. \square

Im folgenden soll aufgezeigt werden, wie die Isomorphie der Algebra M zur Quaternionenalgebra A zu effizienteren Berechnungen mit Dreiecksgruppenelementen ausgenutzt werden kann. Im Vordergrund stehen dabei nur die Operationen Multiplikation und Spur-Berechnung. Es wird dabei nur der Normalfall angenommen, die Behandlung der drei Sonderfälle von Korollar 3.55 kann ähnlich erfolgen.

Ein echter Vorteil kann nur dann erreicht werden, wenn die Erzeuger x und y der Dreiecksgruppe als eine Linearkombination der Basiselemente von A dargestellt werden und auch alle Operationen in dieser Algebra durchgeführt werden. Somit sind während der Berechnung keine Basenwechsel von M zu A und umgekehrt nötig.

Durch Invertierung der obigen Matrix erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{w} & 1 & -\sin^2 \beta & \tilde{w} \\ -\tilde{w} & 1 & 1 & 0 \\ \tilde{w}^2 & -\tilde{w} & -\tilde{w} & -\tilde{w}^2 + \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{w} & \frac{1}{1 + \sin^2 \beta} & \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \tilde{w}^2}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} & \frac{\tilde{w}}{(1 + \sin^2 \beta)(\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta))} \\ 0 & -\frac{1}{1 + \sin^2 \beta} & \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} & -\frac{\tilde{w}}{(1 + \sin^2 \beta)(\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta))} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{w}}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} & \frac{1}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{1}, \\ e_3 &= \frac{(\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2) i - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) j + k}{(1 + \sin^2 \beta)(\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta))}, \\ e_4 &= \frac{1}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} [\tilde{w} j + k]. \end{aligned}$$

Somit besitzen die Erzeuger einer Dreiecksgruppe in der Algebra A die Darstellungen

$$\begin{aligned} x &= [-\cos \alpha, 0, -1, 0] = -\cos \alpha I - e_3 \\ &= -\cos \alpha \mathbf{1} + \frac{1}{1 + \sin^2 \beta} i + \frac{\sin^2 \alpha}{\tilde{w}^2 - \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta)} j \\ &\quad - \frac{\tilde{w}}{(1 + \sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2)} k, \\ y &= [-\cos \beta, 0, 0, -1] = -\cos \beta I - e_4 \\ &= -\cos \beta \mathbf{1} - \frac{\tilde{w}}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} j - \frac{1}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta) - \tilde{w}^2} k. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der obigen Regeln für die Produkte i^2 , ij , ji , j^2 lässt sich die Multiplikation in der Quaternionenalgebra A sehr leicht durchführen. Einen deutlichen Effizienzgewinn kann man bei der Spurberechnung in A erzielen, wie die folgenden Umformungen zeigen. Am Ende von Abschnitt 3.4 wird für die Spur die Berechnungsvorschrift

$$\operatorname{tr}(rI + se_2 + te_3 + ue_4) = 2r + 2s(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) = 2r + 2s\tilde{w}$$

hergeleitet. Damit erhält man für ein beliebiges Element der Algebra A

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(r\mathbf{1} + si + tj + uk) \\ &= \operatorname{tr}(rI + s(-\tilde{w}\mathbf{1} + e_2 - \sin^2 \beta e_3 + \tilde{w}e_4) + t(-\tilde{w}\mathbf{1} + e_2 + e_3) \\ &\quad + u(\tilde{w}^2\mathbf{1} - \tilde{w}e_2 - \tilde{w}e_3 + (-\tilde{w}^2 + \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \beta))e_4)) \\ &= 2(r - s\tilde{w} - t\tilde{w} + u\tilde{w}^2) + 2\tilde{w}(s + t - u\tilde{w}) = 2r. \end{aligned}$$

Die Spur eines Elementes ist also stets das Doppelte der ersten Komponente. Dies korrespondiert mit der reduzierten Spur aus Definition 3.49.

Ergebnis. Multiplikationen und Spurberechnungen von Elementen einer Dreiecksgruppe

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) = \langle x, y \mid x^{m_1} = y^{m_2} = (xy)^{m_3} = 1 \rangle$$

können in zwei zueinander isomorphen vierdimensionalen Algebren M und A über dem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ mit

$$\alpha = \frac{\pi}{m_1}, \quad \beta = \frac{\pi}{m_2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{m_3}$$

effizient durchgeführt werden. In den vergangenen Abschnitten wurden für die Erzeuger x und y jeweils Darstellungen in M und A hergeleitet und Regeln für die Multiplikation formuliert. Die Spur-Berechnung eines Elementes lässt sich dabei jeweils wie folgt beschreiben.

$$\begin{aligned} \text{Basis von } M: \{I, e_2, e_3, e_4\} &\Rightarrow \operatorname{tr}(rI + se_2 + te_3 + ue_4) = 2r + 2s(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) \\ \text{Basis von } A: \{\mathbf{1}, i, j, k\} &\Rightarrow \operatorname{tr}(r\mathbf{1} + si + tj + uk) = 2r \end{aligned}$$

Alle Berechnungen können wegen $r, s, t, u \in \mathbb{F}$ im Körper \mathbb{F} durchgeführt werden.

3.6 Anwendung der effizienten Rechenmethoden

In diesem Abschnitt soll wieder das Beispiel von 2.5 und 3.3 aufgegriffen werden. Dort wurden die beiden Epimorphismen $\varphi_i: \Delta(3, 5, 5) \mapsto A_5$ betrachtet, die durch die Angabe der Bilder der Erzeuger eindeutig bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1, 2, 3), \quad \varphi_1(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_1(xy) = (1, 3, 2, 4, 5) \quad \text{und} \\ \varphi_2(x) &= (1, 2, 4), \quad \varphi_2(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_2(xy) = (1, 3, 4, 2, 5). \end{aligned}$$

Diese Homomorphismen besitzen die Kerne

$$\begin{aligned}
 N_1 = \ker \varphi_1 = \langle & yx^2yx^2yx^2, y^2xy^2x, y^4xy^4xy^4x, y^4x^2y^3x^2y^4, y^3x^2y^3x^2, y^4x^2yxxy^2y^4x^2y^4x^2, \\
 & xy^4x^2y^3x^2y^4x^2, yxyxy^4xy^4x^2y, x^2y^4x^2y^3x^2y^4x, yxy^4xyxy^4x, xyx^2yx^2yx, \\
 & yx^2y^4x^2yx^2y^4x^2, yx^2y^3x^2y^2, y^2x^2y^2xy^4x, yxy^4x^2y^4xy^4x^2y^4x, xy^3x^2y^3x, \\
 & y^4xyxy^4xyx, xyx^2y^3x^2y^2x^2 \rangle \text{ und} \\
 N_2 = \ker \varphi_2 = \langle & xyxy^3xy^4x^2y^3x^2, y^2xy^2x^2yxxy^2x^2y^4, xy^2xy^2xy^4x^2y^3x^2y^4, x^2y^3xy^4x^2y^4x^2, \\
 & yx^2yx^2, y^4xy^4x, xyx^2yx, y^2x^2yx^2y^4, y^3xy^4xy, x^2y^2x^2yxxy, xy^2x^2yx^2y^4x^2, \\
 & xy^3xy^4x^2y^4, x^2y^2xy^2xy^4x^2y^3x^2y^4x^2, yxy^3xy^4x^2y^3, yxy^2x^2yxxy^2x^2, \\
 & y^4x^2y^2x^2yxxy^2, y^4x^2y^3xy^4x^2y^3x, xyxy^2x^2yxxy^2x \rangle.
 \end{aligned}$$

Für die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ gilt $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\beta = \gamma = \frac{\pi}{5}$. Damit können alle Berechnungen in einem Vektorraum über dem Körper

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

durchgeführt werden, da nach Korollar 3.42 die Inklusion

$$\Delta(3, 5, 5) = \langle x, y \rangle \subset M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta q & c \sin \alpha + d \sin \beta q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

gilt. Zur internen Speicherung eines Elementes $[a, b, c, d]$ der Dreiecksgruppe werden also 8 rationale Zahlen benötigt. Nach Abschnitt 3.4 besitzen die Erzeuger die Darstellungen

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = [-\cos \alpha, 0, -1, 0] = \left[-\frac{1}{2}, 0, -1, 0\right] \text{ und} \\
 y &= \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta q \\ \sin \beta \frac{1}{q} & -\cos \beta \end{pmatrix} = [-\cos \beta, 0, 0, -1] = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{4}, 0, 0, -1\right].
 \end{aligned}$$

Implementiert man in einem Computerprogramm die Regeln für die Multiplikation und Spur-Berechnung gemäß Abschnitt 3.4, so erhält man für die Spuren der 18 Erzeuger von N_1 die folgenden Werte. Dabei wurden die Erzeuger aufsteigend bezüglich des Quadrates der Spur geordnet.

Erzeuger $u \in N_1$	$\text{tr}(u)$	$\text{tr}^2(u)$
y^2xy^2x	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$xy^3x^2y^3x$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$y^3x^2y^3x^2$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$yx^2y^3x^2y^2$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$y^4x^2y^3x^2y^4$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$xyx^2y^3x^2y^2x^2$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$xy^4x^2y^3x^2y^4x^2$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$x^2y^4x^2y^3x^2y^4x$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$y^4x^2yxxy^2y^4x^2y^4x^2$	$3 + 10 \cos \beta \approx 11.0902$	$34 + 110 \cos \beta \approx 122.992$
$yx^2yx^2yx^2$	$8 + 20 \cos \beta \approx 24.1803$	$164 + 520 \cos \beta \approx 584.689$
xyx^2yx^2yx	$8 + 20 \cos \beta \approx 24.1803$	$164 + 520 \cos \beta \approx 584.689$
$y^4xy^4xy^4x$	$8 + 20 \cos \beta \approx 24.1803$	$164 + 520 \cos \beta \approx 584.689$
$yxxy^4xyxy^4x$	$8 + 30 \cos \beta \approx 32.2705$	$289 + 930 \cos \beta \approx 1041.39$
y^4xyxy^4xyx	$8 + 30 \cos \beta \approx 32.2705$	$289 + 930 \cos \beta \approx 1041.39$
$yx^2y^4x^2yx^2y^4x^2$	$8 + 30 \cos \beta \approx 32.2705$	$289 + 930 \cos \beta \approx 1041.39$
$yxxyxy^4xy^4x^2y$	$12 + 40 \cos \beta \approx 44.3607$	$544 + 1760 \cos \beta \approx 1967.87$
$y^2x^2y^2xy^4x$	$-13 - 40 \cos \beta \approx -45.3607$	$569 + 1840 \cos \beta \approx 2057.59$
$yxxy^4x^2y^4xy^4x^2y^4x$	$-13 - 40 \cos \beta \approx -45.3607$	$569 + 1840 \cos \beta \approx 2057.59$

Analog erhält man für die Erzeuger des zweiten Normalteilers die folgende Tabelle.

Erzeuger $v \in N_2$	$\text{tr}(v)$	$\text{tr}^2(v)$
yx^2yx^2	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
y^4xy^4x	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
xyx^2yx	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
y^3xy^4xy	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
$y^2x^2yx^2y^4$	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
$xy^2x^2yx^2y^4x^2$	$2 + 8 \cos \beta \approx 8.47214$	$20 + 64 \cos \beta \approx 71.7771$
$x^2y^2x^2yxy$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$xy^3xy^4x^2y^4$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$yxxy^3xy^4x^2y^3$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$y^4x^2y^2x^2yxy^2$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$x^2y^3xy^4x^2y^4x^2$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$xyxy^3xy^4x^2y^3x^2$	$6 + 16 \cos \beta \approx 18.9443$	$100 + 320 \cos \beta \approx 358.885$
$yxxy^2x^2yxy^2x^2$	$18 + 64 \cos \beta \approx 69.7771$	$1348 + 4352 \cos \beta \approx 4868.84$
$xyxy^2x^2yxy^2x$	$18 + 64 \cos \beta \approx 69.7771$	$1348 + 4352 \cos \beta \approx 4868.84$
$y^4x^2y^3xy^4x^2y^3x$	$18 + 64 \cos \beta \approx 69.7771$	$1348 + 4352 \cos \beta \approx 4868.84$
$y^2xy^2x^2yxy^2x^2y^4$	$18 + 64 \cos \beta \approx 69.7771$	$1348 + 4352 \cos \beta \approx 4868.84$
$xy^2xy^2xy^4x^2y^3x^2y^4$	$-58 - 192 \cos \beta \approx -213.331$	$12580 + 40704 \cos \beta \approx 45510.2$
$x^2y^2xy^2xy^4x^2y^3x^2y^4x^2$	$-58 - 192 \cos \beta \approx -213.331$	$12580 + 40704 \cos \beta \approx 45510.2$

Der Spurberechnung wurde in den vergangenen Abschnitten eine so große Bedeutung beigemessen, weil sie in entscheidender Beziehung zur Konjugiertheit von Elementen einer Dreiecksgruppe steht.

Lemma 3.56 ([Bea83]) *Zwei von der Identität verschiedene Matrizen in $PSL(2, \mathbb{R})$ sind genau dann konjugiert zueinander, wenn sie bis auf das Vorzeichen die gleiche Spur besitzen.*

Betrachtet man obige Tabellen, so kann man aus ihnen zwar sofort ersehen, dass die angegebene Menge der Erzeuger von N_1 nicht konjugiert ist zu der Menge der Erzeuger von N_2 , aber es ist natürlich nicht ablesbar, ob die beiden Normalteiler in $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugiert sind.

Um diese Fragestellung allein durch die Berechnung von Spurwerten positiv beantworten zu können, müsste man Erzeugendensysteme E_1 und E_2 von N_1 bzw. N_2 finden, wobei jedem Element von E_1 genau ein dazu konjugiertes Element von E_2 zugeordnet werden kann und umgekehrt.

Dazu sollen zunächst Elemente $e_1 \in N_1$ und $e_2 \in N_2$ mit $\text{tr}(e_1) = \text{tr}(e_2)$ gefunden werden. Die Mengen $\{e_1\}$ und $\{e_2\}$ müssten dann zu Erzeugendensystemen von N_1 und N_2 vervollständigt werden. Zu diesem Zweck wurde ein Programm erstellt, welches eine Liste aller Wörter über dem Alphabet $\{x, y\}$ mit maximaler Länge 20 erzeugt und anschließend für jedes Wort die exakte Spur berechnet. Anschließend wurde mit Hilfe von GAP zu jedem Wort der Liste bestimmt, ob es in einem der Normalteiler N_1 oder N_2 enthalten ist. Das effizienteste Verfahren, für ein gegebenes Wort $g \in \Delta(3, 5, 5)$ festzustellen, ob $g \in N_i$ gilt, ist es, die Rechtsnebenklasse $N_i g \in N_i \setminus \Delta(3, 5, 5)$ zu bilden und auf Gleichheit mit der Rechtsnebenklasse $N_i \text{Id}$ zu prüfen.

Das kürzeste Wort dieser alphabetisch geordneten Liste, welches im Durchschnitt $N_1 \cap N_2$ enthalten ist, ist⁸

$$e_1 = x^2yxyxy^3x^2yxyxy^3 = (x^2yxyxy^3)^2$$

und besitzt die Spur $38 + 120 \cos \beta$. Das kürzeste Element in N_2 mit derselben Spur ist

$$e_2 = x^2yx^2y^2xy^4xy^3.$$

Die folgende Tabelle vergleicht diese beiden Elemente.

⁸Das Element e_1 ist das Quadrat des kürzesten Diagonalelementes $x^2yxyxy^3 = [\frac{5}{2} + 12 \cos \beta, -2 - 4 \cos \beta, 0, 0]$ mit der Spur $2 + 12 \cos \beta$, welches weder in N_1 , noch in N_2 liegt.

Eigenschaft	e_1	e_2
Wort in $\Delta(3, 5, 5)$	$x^2yxyxy^3x^2yxyxy^3$	$x^2yx^2y^2xy^4xy^3$
Darstellung als Element von M	$\begin{bmatrix} 40 + 126 \cos \beta, \\ -16 - 56 \cos \beta, \\ 0, \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40 + 129 \cos \beta, \\ -18 - 56 \cos \beta, \\ 2 + 6 \cos \beta, \\ 3 + 12 \cos \beta \end{bmatrix}$
Näherungsmatrix	$\begin{pmatrix} 0.007 & 0 \\ 0 & 135.074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.195 & 39.91 \\ -7.58 & 137.3 \end{pmatrix}$
Spur	$38 + 120 \cos \beta \approx 135.082$	$38 + 120 \cos \beta \approx 135.082$

Nach Lemma 3.56 existiert also ein Element $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $e_1^h = e_2$. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit allgemeinen Herangehensweisen zur Bestimmung aller solchen Elemente h . Es soll aber gleich darauf hingewiesen werden, dass das in diesem Abschnitt angedeutete Verfahren leider nicht praktikabel ist, um die Frage nach der Konjugiertheit zweier Normalteiler effizient zu klären.

3.7 Konjugiertheitsbetrachtungen

In diesem Abschnitt soll die Fragestellung untersucht werden, welche Elemente $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ für zwei vorgegebene $u, v \in \Delta(m_1, m_2, m_3)$ die Bedingung $u^h = v$ erfüllen.

Lemma 3.57 *Sind von einem Element $m \in GL(2, \mathbb{R})$ die Werte $\text{tr}(m)$ und $\det(m)$ festgelegt, so auch die Eigenwerte von m .*

Beweis. Sei $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc)$$

die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{tr}(m) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}^2(m) - 4 \det(m)}. \quad \square$$

Lemma 3.58 *Besitzt $u \in PSL(2, \mathbb{R})$ die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, so ist u in $PSL(2, \mathbb{C})$ konjugiert zu $w = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\text{tr}(w) = \text{tr}(u)$, $\det(w) = \det(u) = 1$ und es gilt $u^h = w$ für $h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, wobei*

$$u \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

gilt (rechte Eigenvektoren).

Beweis. Die Hauptaussagen folgen aus dem Satz über die Jordan-Normalform. Weiterhin gilt $\text{tr}(w) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(w) = \lambda_1 \lambda_2$. Als charakteristische Polynome erhält man

$$\begin{aligned} \text{charpoly}(w) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2, \\ \text{charpoly}(u) &= \lambda^2 - \text{tr}(u)\lambda + \det(u) \text{ nach Lemma 3.57.} \end{aligned}$$

Da u und w das gleiche charakteristische Polynom besitzen, liefert der Koeffizientenvergleich die restlichen Aussagen. □

Bemerkung 3.59 *Sind $u, v \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $\text{tr}^2(u) = \text{tr}^2(v)$ gegeben, so findet man mit Hilfe von Lemma 3.58 stets ein $h \in PSL(2, \mathbb{C})$ mit $u^h = v$. Dabei muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden.*

- (a) $\mathbf{tr}(u) = \mathbf{tr}(v)$. Da $u, v \in PSL(2, \mathbb{R})$, gilt $\det(u) = \det(v) = 1$. Nach Lemma 3.57 besitzen u und v dann dieselben Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 3.58 existieren $h_1, h_2 \in PSL(2, \mathbb{C})$ mit $u^{h_1} = v^{h_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Damit gilt

$$h_1^{-1} u h_1 = h_2^{-1} v h_2 \Rightarrow h_2 h_1^{-1} u h_1 h_2^{-1} = v \Rightarrow u^{h_1 h_2^{-1}} = v.$$

Als gesuchtes Element kann man somit $h = h_1 h_2^{-1}$ wählen.

- (b) $\mathbf{tr}(u) = -\mathbf{tr}(v)$. Da $u, v \in PSL(2, \mathbb{R})$, gilt $\det(u) = \det(v) = 1$. Nach Lemma 3.57 besitzt u die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \mathbf{tr}(u) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{tr}^2(u) - 4}$$

und v die Eigenwerte

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \mathbf{tr}(u) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{tr}^2(u) - 4}.$$

Damit gilt $\lambda_3 = -\lambda_2$ und $\lambda_4 = -\lambda_1$. Nach Lemma 3.58 gibt es $h_1, h_2 \in PSL(2, \mathbb{C})$ mit

$$u^{h_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ und } v^{h_2} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

In $PSL(2, \mathbb{C})$ gilt $u^{h_1} = v^{h_2}$ und somit kann auch in diesem Fall $h = h_1 h_2^{-1}$ gewählt werden.

Im folgenden wird bei zueinander konjugierten Elementen stets von $\mathbf{tr}(u) = \mathbf{tr}(v)$ ausgegangen. Gilt $\mathbf{tr}(u) = -\mathbf{tr}(v)$, so kann beispielsweise v durch $-v$ ersetzt werden. Dadurch wird in $PSL(2, \mathbb{R})$ immer noch dasselbe Element dargestellt und die Voraussetzungen der nachfolgenden Aussagen sind trotzdem erfüllt.

Theorem 3.60 *Seien*

$$u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

zwei von der Identität verschiedene Elemente mit $\mathbf{tr}(u) = \mathbf{tr}(v)$. Dann gilt $u^h = v$ mit

- (a) $h = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E - A & F \end{pmatrix}$ für $B \neq 0, F \neq 0$,
- (b) $h = \begin{pmatrix} A^{-1} - E & -F \\ E - A & F \end{pmatrix}$ für $B = C = 0, F \neq 0, A \neq \pm 1$,
- (c) $h = \begin{pmatrix} B & B \\ E - A & E^{-1} - A \end{pmatrix}$ für $F = G = 0, B \neq 0, E \neq \pm 1$,
- (d) $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $B = C = F = G = 0, A \neq \pm 1, E \neq \pm 1, A = \pm E$,
- (e) $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ für $B = C = F = G = 0, A \neq \pm 1, E \neq \pm 1, A = \pm \frac{1}{E}$.

Beweis. Die Aussagen dieses Theorems sind eine direkte Anwendung von Bemerkung 3.59, deshalb werden im Rahmen dieses Beweises auch die dortigen Bezeichnungen verwendet.

- (a) Wegen $u, v \in PSL(2, \mathbb{R})$ besitzen u und v nach Lemma 3.57 die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \mathbf{tr}(u) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{tr}^2(u) - 4} = \frac{A + D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A + D)^2 - 4}.$$

Bestimmt man die Eigenvektoren nach Lemma 3.58, so erhält man

$$\begin{aligned} u \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Aa + Bb \\ Ca + Db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_1 b \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b = \frac{\lambda_1 - A}{B} a &\text{ oder } b = \frac{Ca}{\lambda_1 - D}. \end{aligned}$$

Diese beiden Werte für b sind identisch, was die folgenden Betrachtungen zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - A}{B} a = \frac{Ca}{\lambda_1 - D} &\Leftrightarrow (\lambda_1 - A)(\lambda_1 - D) - BC = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 - A & B \\ C & \lambda_1 - D \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \text{ ist Eigenwert von } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im folgenden wird $a = B$ und damit $b = \lambda_1 - A$ gewählt. Analog erhält man aus

$$u \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sofort } d = \frac{\lambda_2 - A}{B} c.$$

Wählt man $c = B$ und damit $d = \lambda_2 - A$, so gilt

$$u^{h_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } h_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man:

$$\text{Ist } v = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \text{ und setzt man } h_2 = \begin{pmatrix} F & F \\ \lambda_1 - E & \lambda_2 - E \end{pmatrix}, \text{ so gilt } v^{h_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 3.59 gilt $u^h = v$ für $h = h_1 h_2^{-1}$. Man erhält:

$$\begin{aligned} h &= \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F & F \\ \lambda_1 - E & \lambda_2 - E \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{F(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 - E & -F \\ E - \lambda_1 & F \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{F(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \begin{pmatrix} B(\lambda_2 - \lambda_1) & 0 \\ (E - A)(\lambda_2 - \lambda_1) & F(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{F} \begin{pmatrix} B & 0 \\ E - A & F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sieht man h als Element von $PSL(2, \mathbb{R})$ an, so ist dies die Behauptung. Es gilt stets $\lambda_1 \neq \lambda_2$, da $u, v \neq I$, somit wird der obige Nenner nicht Null.

- (b) Gilt $u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1 = A$ und $\lambda_2 = A^{-1}$ die Eigenwerte von u und v . Somit gilt

$$\begin{aligned} u^{h_1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\ v^{h_2} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } h_2 = \begin{pmatrix} F & F \\ \lambda_1 - E & \lambda_2 - E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $A \neq \pm 1$ ist $\lambda_1 - E \neq \lambda_2 - E$; daraus und aus der zusätzlichen Bedingung $F \neq 0$ folgt, dass h_2 weder eine Nullzeile noch eine Nullspalte enthält und damit stets invertierbar ist. Schließlich erhält man

$$h = h_1 h_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{F(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 - E & -F \\ E - \lambda_1 & F \end{pmatrix} = \frac{1}{F(A^{-1} - A)} \begin{pmatrix} A^{-1} - E & -F \\ E - A & F \end{pmatrix}.$$

Wegen $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ kann der skalare Vorfaktor entfallen.

- (c) Gilt $v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$, so ist $\lambda_1 = E$, $\lambda_2 = E^{-1}$ und es gilt

$$\begin{aligned} u^{h_1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } h_1 = \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} \text{ und} \\ v^{h_2} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $B \neq 0$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist h_1 invertierbar und es gilt

$$h = h_1 h_2^{-1} = \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & B \\ E - A & E^{-1} - A \end{pmatrix}.$$

(d) Gilt $u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$ und $A = \pm E$, so gilt $u = v$ in $PSL(2, \mathbb{R})$. Damit gilt $u^I = v$.

(e) Gilt $u = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$ und $A = \pm \frac{1}{E}$, so erhält man mit $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$u^h = h^{-1}uh = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = v. \quad \square$$

Dieses Theorem gibt für zueinander konjugierte Elemente u, v die Gestalt eines Elementes $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $u^h = v$ an. Da aber alle solche konjugierenden Elemente h bestimmt werden sollen, wird im weiteren untersucht, welche Elemente aus $PSL(2, \mathbb{R})$ mit einem vorgegebenen Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G = \Delta(m_1, m_2, m_3)$ vertauschbar sind. Da nach Korollar 3.42 stets die Inklusion $G \subseteq M$ gilt, folgt $a = 0 \Leftrightarrow d = 0$ und $b = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Diese Eigenschaft wird im folgenden stets verwendet.

Lemma 3.61 Mit $0 \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Delta(m_1, m_2, m_3)$ sind die folgenden Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$ vertauschbar:

(a) Mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind alle Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$ vertauschbar.

(b) Mit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sind für $a \neq d$ genau die Diagonalmatrizen $\left\{ \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \mid e, h \in \mathbb{R} \right\}$ vertauschbar.

(c) Für $b \neq 0$ sind es genau die Matrizen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a+h & b \\ c & d+h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$.

Beweis.

(a) Mit der Einheitsmatrix ist jedes Element von $PSL(2, \mathbb{R})$ vertauschbar.

(b) Wegen $a \neq d$ ist die vorgegebene Matrix nicht die Identität in $PSL(2, \mathbb{R})$, sonst würde Fall (a) eintreten. Man erhält somit

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ae & af \\ dg & dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & df \\ ag & dh \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow f(a-d) = 0 = g(a-d).$$

Aus $a \neq d$ folgt $f = g = 0$ und damit die Behauptung.

(c) Nach der Vorbemerkung gilt für Dreiecksgruppenelemente $b \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$. Es gelte

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man die folgenden gleichzeitig zu erfüllenden Bedingungen:

(1) $bg = cf$

(2) $af + bh = be + df$

(3) $ce + dg = ag + ch$

Die Bedingung (3) folgt dabei aus (1) und (2):

$$b \neq 0 \Rightarrow h - e = \underset{(2)}{f} \underset{(1)}{b} (d - a) = \underset{(1)}{bg} \underset{(1)}{cb} (d - a) = \frac{g}{c} (d - a) \Rightarrow c(h - e) = g(d - a) \Leftrightarrow (3).$$

Die Variablen e, f, g, h müssen also nur (1) und (2) erfüllen. Für $f = 0$ erhält man daraus alle Matrizen der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ in } PSL(2, \mathbb{R}).$$

Für $f \neq 0$ erhält man

$$(1) \Rightarrow g = \frac{c}{b} f$$

$$(2) \Rightarrow e = h - \frac{f}{b} (d - a) = \frac{a - d}{b} f + h$$

und damit

$$\begin{aligned} \left\{ u \in PSL(2, \mathbb{R}) \setminus I \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u = u \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a-d}{b} f + h & f \\ \frac{c}{b} f & h \end{pmatrix} \mid f, h \in \mathbb{R} \right\} \\ &\stackrel{\text{Einträge mit } b/f \text{ erweitern}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a - d + b \cdot \frac{h}{f} & b \\ c & b \cdot \frac{h}{f} \end{pmatrix} \mid f, h \in \mathbb{R}, f \neq 0 \right\} \\ &\stackrel{\substack{bh/f \text{ durchläuft} \\ \text{ganz } \mathbb{R}}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a - d + \tilde{h} & b \\ c & \tilde{h} \end{pmatrix} \mid \tilde{h} \in \mathbb{R} \right\} \stackrel{\substack{\text{Setze} \\ h = \tilde{h} - d}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a + h & b \\ c & d + h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 3.62 *Mit dem Dreiecksgruppenelement*

$$\begin{pmatrix} A + B \sin \alpha \sin \beta q & C \sin \alpha + D \sin \beta q \\ -C \sin \alpha - D \sin \beta \frac{1}{q} & A + B \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix} \in \Delta(m_1, m_2, m_3)$$

sind in $PSL(2, \mathbb{R})$ für

- (a) $(C, D) = (0, 0)$, $B = 0$: alle Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$,
- (b) $(C, D) = (0, 0)$, $(A, B) \neq (0, 0)$: alle Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$,
- (c) $(C, D) \neq (0, 0)$: genau die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} A + B \sin \alpha \sin \beta q + h & C \sin \alpha + D \sin \beta q \\ -C \sin \alpha - D \sin \beta \frac{1}{q} & A + B \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} + h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$$

vertauschbar.

Beweis. Direkte Anwendung von Lemma 3.61. □

Das folgende Lemma klärt die Fragestellung dieses Abschnittes, indem für zueinander konjugierte Elemente u, v die Menge aller konjugierenden Elemente angegeben wird.

Lemma 3.63 *Seien $u, v \in PSL(2, \mathbb{R})$ zwei von der Identität verschiedene Elemente mit $\text{tr}^2(u) = \text{tr}^2(v)$. Dann gilt*

$$\{h \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid u^h = v\} = \{h_2 h_1 \mid h_2 \in \mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(u)\},$$

wobei h_1 das zu u und v gehörende $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ aus Theorem 3.60 darstellt.

Beweis. $\mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(u)$ bezeichne wie üblich den Zentralisator $\{h_2 \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid u^{h_2} = u\}$ von u in $PSL(2, \mathbb{R})$. Die Gleichheit der beiden Mengen wird durch Nachweis beider Inklusionen gezeigt.

„ \subseteq “: Sei $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $u^h = v$. Zu zeigen ist

$$hh_1^{-1} \in \mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(u) \Leftrightarrow u^{hh_1^{-1}} = u.$$

Dies gilt wegen

$$u^{hh_1^{-1}} = (u^h)^{h_1^{-1}} = v^{h_1^{-1}} = u.$$

„ \supseteq “: Sei $h_2 \in \mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(u)$. Dann gilt

$$u^{h_2 h_1} = (u^{h_2})^{h_1} = u^{h_1} = v. \quad \square$$

Im Abschnitt 3.6 wurden Elemente

$$e_1 = (x^2 y x y x y^3)^2 \in N_1, \quad e_2 = x^2 y x^2 y^2 x y^4 x y^3 \in N_2$$

mit derselben Spur $\text{tr}(e_1) = \text{tr}(e_2) = 38 + 120 \cos \beta$ betrachtet, die nach Lemma 3.56 in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Aus der e_i -Vergleichstabelle vom letzten Abschnitt ist sofort die Gestalt

$$e_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \text{ wegen Determinante 1 und } e_2 = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

erkenntlich, wobei

$$\begin{aligned} A &= (40 + 126 \cos \beta) + (-16 - 56 \cos \beta) \sin \alpha \sin \beta q, \\ A^{-1} &= (40 + 126 \cos \beta) + (-16 - 56 \cos \beta) \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q}, \\ E &= (40 + 129 \cos \beta) + (-18 - 56 \cos \beta) \sin \alpha \sin \beta q, \\ F &= (2 + 6 \cos \beta) \sin \alpha + (3 + 12 \cos \beta) \sin \beta q, \\ G &= -(2 + 6 \cos \beta) \sin \alpha - (3 + 12 \cos \beta) \sin \beta \frac{1}{q}, \\ H &= (40 + 129 \cos \beta) + (-18 - 56 \cos \beta) \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Theorem 3.60 kann ein konkretes $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $e_1^h = e_2$ angegeben werden.

$$\text{Es gilt } h = \begin{pmatrix} A^{-1} - E & -F \\ E - A & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$h_{11} = (-42 - 135 \cos \beta) + (34 + 112 \cos \beta) \sin \alpha \sin \beta q,$$

$$h_{12} = (-2 - 6 \cos \beta) \sin \alpha + (-3 - 12 \cos \beta) \sin \beta q,$$

$$h_{21} = 3 \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta q,$$

$$h_{22} = (2 + 6 \cos \beta) \sin \alpha + (3 + 12 \cos \beta) \sin \beta q.$$

Dabei wurde für die Berechnung der Differenz $A^{-1} - E$ die Beziehung $q + q^{-1} = w$ verwendet, welche nach Lemma 3.39 (ii) gilt. Nach Korollar 3.62 ergibt sich der Zentralisator von e_1 gerade zu

$$\mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Damit ist nach Lemma 3.63 die Menge der Elemente in $PSL(2, \mathbb{R})$, die e_1 zu e_2 konjugieren, gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} h_{11} t & h_{12} t \\ h_{21} t^{-1} & h_{22} t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dieses kurze Beispiel zeigt bereits die Hauptprobleme auf, die entstehen, wenn man konjugierende Elemente h bestimmen möchte. Zum einen lassen sie sich schlecht in eine behandelbare Form bringen, des weiteren fällt es schwer, ein beliebiges Element $[a, b, c, d] \in \Delta(3, 5, 5) \subset M$ mit einem geeigneten Element h aus der obigen Menge zu konjugieren, so dass das Resultat $[a, b, c, d]^h$ wieder in M oder besser noch in $\Delta(3, 5, 5)$ liegt.

Während die Elemente von Dreiecksgruppen also in einer leicht auf dem Computer nachzubildenden Quaternionenalgebra M enthalten sind, bereitet das Rechnen mit konjugierenden Elementen größere Probleme. Im folgenden Kapitel soll deshalb ein Ansatz zur Lösung des Problems gewählt werden, der sich nicht auf die Konjugiertheit einzelner Dreiecksgruppenelemente bezieht. Weiterhin stellt sich heraus, dass sich für *nicht-maximale* Dreiecksgruppen die Menge der zu betrachtenden Repräsentanten h deutlich reduziert, da für diese Gruppen der oben frei wählbare reelle Parameter t in einem festen Erweiterungskörper von \mathbb{Q} liegen muss. Für sogenannte *maximale* Dreiecksgruppen kann das konjugierende Element sogar stets in der Dreiecksgruppe gewählt werden.

4 Arithmetische Dreiecksgruppen

In diesem Kapitel wird definiert, wann eine Fuchssche Gruppe *arithmetisch* genannt wird. Dazu ist eine Einleitung in *Tensorprodukte* nötig, da zur Konstruktion von arithmetischen Gruppen Tensorprodukte von Quaternionenalgebren mit Körpern benötigt werden.

Eine Zielsetzung dieser Ausarbeitung ist die Untersuchung der Fragestellung, wann die Kerne von Epimorphismen von Dreiecksgruppen in alternierende Gruppen in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Aus einem Resultat von Gregori A. Margulis folgt interessanterweise, dass dies für maximale nicht-arithmetische Dreiecksgruppen nur dann möglich ist, wenn das konjugierende Element bereits in der Dreiecksgruppe liegt. Völlig offen ist dagegen noch, ob eine Übertragung dieses allgemeinen Ergebnisses auf den arithmetischen Fall möglich ist.

4.1 Konstruktion arithmetischer Dreiecksgruppen

Im folgenden soll der Begriff des *Tensorprodukts* erarbeitet werden. Dabei wurde bewusst darauf geachtet, dass nur Begriffsbildungen und Eigenschaften notiert wurden, die im weiteren Verlauf noch benötigt werden. Die Darstellung stützt sich maßgeblich auf [Far01].

Definition 4.1 Sei \mathfrak{X} eine nichtleere Menge und \mathbb{F} ein Körper. $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$ sei die Menge aller Funktionen $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{F}$ mit **endlichem Träger** (finite support), d.h. $f(x) \neq 0$ für nur endlich viele $x \in \mathfrak{X}$. Mit den Operationen

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda(f(x)) \end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathbb{F}(\mathfrak{X})$ und $\lambda \in \mathbb{F}$ wird $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$ zu einem Vektorraum über \mathbb{F} . $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$ heißt **freier Vektorraum** über der Menge \mathfrak{X} .

Theorem 4.2 Identifiziert man jedes Element $x_0 \in \mathfrak{X}$ mit der Funktion $v_{x_0}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{F}$, die durch

$$v_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0, \\ 0 & \text{für } x \neq x_0 \end{cases}$$

definiert ist, so ist die Zuordnung $x_0 \leftrightarrow v_{x_0}$ bijektiv. Somit kann die Menge \mathfrak{X} als eine Teilmenge des Vektorraumes $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$ angesehen werden. Definiert man die injektive Abbildung

$$v: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{F}(\mathfrak{X}) \text{ durch } v(x_0) = v_{x_0} \text{ für alle } x_0 \in \mathfrak{X},$$

so ist $v(\mathfrak{X})$ eine Basis von $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$.

Definition 4.3 Seien V und W Vektorräume über dem Körper \mathbb{F} . Dann ist $\mathbb{F}(V \times W)$ der freie Vektorraum über dem kartesischen Produkt $V \times W$. Die Existenz der kanonischen Einbettung $v: V \times W \rightarrow \mathbb{F}(V \times W)$ erlaubt es, $V \times W$ als Untermenge – sogar als Basis – von $\mathbb{F}(V \times W)$ aufzufassen. Sei L der kleinste Unterraum von $\mathbb{F}(V \times W)$, der von allen Elementen

$$\begin{aligned} (v + v', w) - (v, w) - (v', w), \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w), \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ erzeugt wird. Das **Tensorprodukt** der Vektorräume V und W über \mathbb{F} ist der Vektorraum

$$V \otimes_{\mathbb{F}} W = \mathbb{F}(V \times W)/L.$$

Die Nebenklasse eines Basiselementes (v, w) von $\mathbb{F}(V \times W)$ wird mit $v \otimes w \in V \otimes_{\mathbb{F}} W$ bezeichnet.

Theorem 4.4 V und W seien Vektorräume über dem Körper \mathbb{F} mit den Basen B_V und B_W . Dann ist die Menge

$$\{v \otimes w \mid v \in B_V, w \in B_W\}$$

eine Basis von $V \otimes_{\mathbb{F}} W$.

Sind A und B Algebren über dem Körper \mathbb{F} , so kann man im Vektorraum $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ stets ein assoziatives Produkt einführen, mit dem $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ zu einer Algebra über \mathbb{F} wird.

Definition 4.5 Eine *assoziative Multiplikation* auf einem Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $\star: V \times V \mapsto V$, so dass

$$u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$$

für alle $u, v, w \in V$ gilt.

Theorem 4.6 Sind A und B Algebren über dem Körper \mathbb{F} , so existiert stets genau eine assoziative Multiplikation \star auf dem Vektorraum $A \otimes_{\mathbb{F}} B$, für die

$$(a \otimes b) \star (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$$

für alle $a, a' \in A, b, b' \in B$ gilt.

Definition 4.7 Seien A und B Algebren über dem Körper \mathbb{F} . Das **Algebra-Tensorprodukt** $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ ist die Algebra mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Als Vektorraum betrachtet, ist $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ das Vektorraum-Tensorprodukt der Vektorräume A und B .
- (2) Das Produkt zweier Tensoren $u, v \in A \otimes_{\mathbb{F}} B$ ist $u \star v$, wobei \star die eindeutig bestimmte assoziative Multiplikation aus Theorem 4.6 ist.

Theorem 4.8

- (1) Ist A eine Algebra mit multiplikativem Einselement über dem Körper \mathbb{F} , dann ist

$$M(n, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} A \cong M(n, A).$$

(Das Algebra-Tensorprodukt der Algebra aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{F} mit A ist isomorph zur Algebra aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus A .)

- (2) Ist $A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$ eine Quaternionenalgebra über dem Körper \mathbb{F} , so ist

$$\left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \cong \left(\frac{a,b}{\mathbb{K}}\right)$$

für einen Körper $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$.

Mit Hilfe des Tensorproduktes ist es nun möglich, die Konstruktion arithmetischer Fuchsscher Gruppen nachzuvollziehen. In der Literatur wurden verschiedene Wege gegangen, diese Begriffsbildungen deutlich zu machen. Den wohl anschaulichsten lieferte [Mac01], dessen Konzept hier nachvollzogen werden soll. Die *modulare Gruppe*

$$\begin{aligned} PSL(2, \mathbb{Z}) &= SL(2, \mathbb{Z}) / \{I, -I\}, \text{ basierend auf} \\ SL(2, \mathbb{Z}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}, \end{aligned}$$

dient als Vorlage zur Definition arithmetischer Fuchsscher Gruppen. Die Konstruktion von $SL(2, \mathbb{Z})$ kann über folgende Teilschritte erfolgen:

$M(2, \mathbb{Q})$	\longrightarrow	$M(2, \mathbb{Z})$	\longrightarrow	$SL(2, \mathbb{Z})$
$\downarrow \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$				\downarrow
$M(2, \mathbb{R})$		\longrightarrow		$SL(2, \mathbb{R})$

Im folgenden werden die in diesem Diagramm dargestellten Konstruktionsschritte einzeln betrachtet. Dabei erfolgen in jedem Punkt Verallgemeinerungen, die zusammengenommen den Begriff *arithmetisch* ausmachen werden.

- (K1) $M(2, \mathbb{Q})$ ist eine Quaternionenalgebra über \mathbb{Q} .

In der Verallgemeinerung wird \mathbb{Q} durch einen endlichen Erweiterungskörper \mathbb{F} von \mathbb{Q} ersetzt. Die Rolle von $M(2, \mathbb{Q})$ übernimmt eine Quaternionenalgebra $A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$ über \mathbb{F} .

(K2) Es gilt $M(2, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = M(2, \mathbb{R})$.

Um diese Beziehung verallgemeinern zu können, muss der Grundkörper \mathbb{F} ein Teilkörper der reellen Zahlen sein ($\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$) und die Quaternionenalgebra A muss so gewählt sein, dass $A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{R} \cong M(2, \mathbb{R})$ gilt. Somit wählt man

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{R} \text{ und } A = \begin{pmatrix} a, b \\ \mathbb{F} \end{pmatrix} \text{ mit } A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{R} \cong \begin{pmatrix} a, b \\ \mathbb{R} \end{pmatrix} \cong M(2, \mathbb{R});$$

dafür dürfen nach Theorem 3.47 (3) die Elemente a und b nicht gleichzeitig negativ sein.

(K3) $M(2, \mathbb{Z})$ ist ein Ring mit einem multiplikativem Einselement, der ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul mit $M(2, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong M(2, \mathbb{Q})$ ist.

\mathbb{Z} wird ersetzt durch den Ganzheitsring $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ des Körpers \mathbb{F} .

Definition 4.9 Sei \mathbb{F} ein endlicher Erweiterungskörper von \mathbb{Q} . Ein Element von \mathbb{F} heißt **ganz**, falls es Nullstelle eines normierten Polynoms in $\mathbb{Z}[x]$ ist. Die Menge aller ganzen Elemente bildet den **Ganzheitsring** (ring of integers) $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ von \mathbb{F} .⁹

Definition 4.10 A sei eine Quaternionenalgebra über dem Körper \mathbb{F} mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ sei der Ganzheitsring von \mathbb{F} . Eine $(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ -**Ordnung** (order) \mathcal{O} in A ist ein Unterring von A mit multiplikativem Einselement, welcher ein endlich erzeugter $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -Modul mit

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} \cong A$$

ist.

Beispiel 4.11

(1) Ist $A = \begin{pmatrix} a, b \\ \mathbb{F} \end{pmatrix}$ eine Quaternionenalgebra mit $a, b \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$, so ist

$$\mathcal{O} = \{x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}}\}$$

eine Ordnung in A .

(2) $M(2, \mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ ist eine Ordnung in $M(2, \mathbb{F})$.

Die obige Konstruktion (K1)–(K3) lässt sich wie folgt fortsetzen:

(K4) $M(2, \mathbb{Z})$ bildet eine Ordnung in $M(2, \mathbb{Q})$.

$M(2, \mathbb{Z})$ wird in der allgemeinen Konstruktion durch eine $(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ -Ordnung \mathcal{O} in A ersetzt.

(K5) $SL(2, \mathbb{F})$ enthält alle Elemente von $M(2, \mathbb{Z})$ mit Determinante 1.

Die reduzierte Norm einer Algebra verallgemeinert das Determinantenkonzept in Matrizenringen. $SL(2, \mathbb{F})$ wird ersetzt durch

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid \text{Nrd}_A(x) = 1\} \text{ [Kat92] oder}$$

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid x\mathcal{O} = \mathcal{O} \text{ und } \text{Nrd}_A(x) = 1\} \text{ [Tak75]}$$

(group of units in \mathcal{O} of reduced norm 1).

Insgesamt erhält man bei Durchführung von (K1)–(K5) eine Kette

$$\mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} \subset A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{R} \cong M(2, \mathbb{R})$$

und damit eine Abbildung

$$\rho: \mathcal{O}^1 \mapsto SL(2, \mathbb{R}).$$

Um Fuchssche Gruppen konstruieren zu können, muss $\rho(\mathcal{O}^1)$ eine diskrete Teilmenge von $SL(2, \mathbb{R})$ sein. Da jede endliche Körpererweiterung von \mathbb{Q} einfach ist, wird im folgenden von $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\kappa)$ ausgegangen.

⁹Nach [Leu96] sind anstelle von **Ganzheitsring** ebenso die Bezeichnungen **Maximalordnung** und **Hauptordnung** gebräuchlich.

Definition 4.12 Ein Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\kappa)$ heißt **absolut reell** (totally real), falls jede Nullstelle des Minimalpolynoms von κ reell ist. In diesem Fall induziert jede andere Nullstelle κ' des Minimalpolynoms durch $\kappa \mapsto \kappa'$ einen Galois-Monomorphismus $\sigma: \mathbb{Q}(\kappa) \mapsto \mathbb{Q}(\kappa') \subset \mathbb{R}$, und es existieren genau $|\mathbb{F} : \mathbb{Q}|$ solche Monomorphismen.

Theorem 4.13 (Borel-Harishchandra, [Mac01]) Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\kappa) \subset \mathbb{R}$. $A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$ sei eine Quaternionenalgebra über \mathbb{F} mit $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right) \cong M(2, \mathbb{R})$, \mathcal{O} sei eine Ordnung in A . Genau dann ist \mathcal{O}^1 eine diskrete Gruppe in $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right)^1 \cong SL(2, \mathbb{R})$ mit einem Fundamentalbereich endlicher hyperbolischer Fläche, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) \mathbb{F} ist absolut reell.
- (2) Für alle Galois-Monomorphismen $\sigma: \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}$, $\sigma \neq \text{Id}$, gilt $\left(\frac{\sigma(a), \sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathbb{H}$.

Jetzt ist es möglich, die Eigenschaft *arithmetisch* zu definieren.

Definition 4.14

- (i) Seien U_1, U_2 Untergruppen einer Gruppe G . U_1 und U_2 sind **kommensurabel** (commensurable), falls ihr Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ sowohl in U_1 als auch in U_2 endlichen Index besitzt.
- (ii) Seien U_1, U_2 Untergruppen einer Gruppe G . U_1 und U_2 sind **kommensurabel im weiten Sinn** (commensurable in the wide sense), falls U_1 und U_2^g für ein $g \in G$ kommensurabel sind.
- (iii) Sei $A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$ eine Quaternionenalgebra über einem absolut reellem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\kappa)$, so dass ein Isomorphismus

$$\rho: \left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right) \mapsto M(2, \mathbb{R})$$

existiert und

$$\left(\frac{\sigma(a), \sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathbb{H}$$

für alle Galois-Monomorphismen $\sigma: \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}$, $\sigma \neq \text{Id}$, gilt. Sei \mathcal{O} eine Ordnung in A . Dann heißt jede Untergruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$, die kommensurabel mit $\rho(\mathcal{O}^1)/\{I, -I\}$ ist, **arithmetische Fuchssche Gruppe**.

- (iv) Ist G eine Untergruppe von endlichem Index in $\rho(\mathcal{O}^1)/\{I, -I\}$, so ist G eine **von einer Quaternionenalgebra abgeleitete Fuchssche Gruppe**.

Kisao Takeuchi verallgemeinert in [Tak77b] die Definition 4.14(ii) auf die folgende Weise und kann anschließend zeigen, dass die Kommensurabilität im weiten Sinn eine Äquivalenzrelation darstellt.

Definition 4.15 U_1, U_2 seien diskrete Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$, deren Fundamentalbereiche endlichen hyperbolischen Flächeninhalt besitzen. Existiert ein $g \in GL(2, \mathbb{R})$, so dass U_2 kommensurabel mit $g^{-1}U_1g$ ist, dann heißt U_2 **kommensurabel mit U_1 im weiten Sinn**.

Theorem 4.16 Seien G_1 und G_2 arithmetische Fuchssche Gruppen, die von den Quaternionenalgebren A_1 und A_2 abgeleitet sind. Dann ist G_1 genau dann kommensurabel mit G_2 im weiten Sinn, wenn A_1 isomorph zu A_2 ist.

Definition 4.17 Sei \mathbb{F} ein absolut reeller algebraischer Erweiterungskörper von \mathbb{Q} mit $|\mathbb{F} : \mathbb{Q}| = n$. Dann besitzt \mathbb{F} genau n paarweise voneinander verschiedene Einbettungen σ_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) in den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen.

$A = \left(\frac{a,b}{\mathbb{F}}\right)$ sei eine Quaternionenalgebra über \mathbb{F} , für die \mathbb{R} -Isomorphismen ρ_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) mit

- (i) $\rho_1: \left(\frac{\sigma_1(a), \sigma_1(b)}{\mathbb{R}}\right) \mapsto M(2, \mathbb{R})$ und
- (ii) $\rho_i: \left(\frac{\sigma_i(a), \sigma_i(b)}{\mathbb{R}}\right) \mapsto \mathbb{H}$ für $i \in \{2, \dots, n\}$

existieren. Dann heißt A **unverzweigt an der Stelle σ_1** (unramified at the place σ_1) und **verzweigt an allen anderen Stellen σ_i** (ramified at all other infinite places σ_i), $i \in \{2, \dots, n\}$.

Bemerkung 4.18 *Kisao Takeuchi fordert in [Tak75] die Existenz eines \mathbb{R} -Isomorphismus*

$$\rho: A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mapsto M(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{H} \oplus \cdots \oplus \mathbb{H},$$

was äquivalent zu (i) und (ii) ist.

Theorem 4.19 *Es seien die Bezeichnungen von Definition 4.17 vorausgesetzt.*

(1) *Bezeichnet man mit $\text{Nrd}_{\mathbb{H}}$ bzw. $\text{Trd}_{\mathbb{H}}$ die reduzierte Norm bzw. die reduzierte Spur in \mathbb{H} , so gilt für jedes $x \in A$:*

- (a) $\text{Nrd}_A(x) = \det(\rho_1(x))$
- (b) $\text{Trd}_A(x) = \text{tr}(\rho_1(x))$
- (c) $\sigma_i(\text{Nrd}_A(x)) = \text{Nrd}_{\mathbb{H}}(\rho_i(x))$, $i \in \{2, \dots, n\}$
- (d) $\sigma_i(\text{Trd}_A(x)) = \text{Trd}_{\mathbb{H}}(\rho_i(x))$, $i \in \{2, \dots, n\}$

(2) *Ist $\mathbb{F} \neq \mathbb{Q}$, so ist A eine Divisionsalgebra.*

Im weiteren Verlauf sollen nur noch arithmetische Dreiecksgruppen betrachtet werden. Alle oben gemachten Aussagen für Fuchssche Gruppen gelten natürlich in diesem Spezialfall ebenso. Kisao Takeuchi ermittelt in [Tak75], [Tak77a] und [Tak77b] eine vollständige Liste aller arithmetischen Dreiecksgruppen. Die Hauptresultate werden hier vorgestellt.

Theorem 4.20 ([Tak75]) *G sei eine Fuchssche Gruppe der ersten Art (der Fundamentalbereich von G besitze endlichen hyperbolischen Flächeninhalt). Dann ist G genau dann arithmetisch, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (I) \mathbb{F}_1 sei der Körper $\mathbb{Q}(\text{tr}(g) \mid g \in G)$, erzeugt von der Menge $\text{tr}(G)$ über \mathbb{Q} . Dann ist \mathbb{F}_1 ein algebraischer Erweiterungskörper von \mathbb{Q} von endlichem Index und $\text{tr}(G)$ ist enthalten im Ganzheitsring $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_1}$ von \mathbb{F}_1 .
- (II₁) \mathbb{F}_2 sei der Körper $\mathbb{Q}(\text{tr}^2(g) \mid g \in G)$. Für jeden Isomorphismus σ von \mathbb{F}_1 in den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} mit $\sigma|_{\mathbb{F}_2} \neq \text{Id}$ ist $\sigma(\text{tr}(G))$ beschränkt in \mathbb{C} .

Theorem 4.21 ([Tak77a]) *G sei die Dreiecksgruppe $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ mit $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$,*

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{m_1} \right), \cos^2 \left(\frac{\pi}{m_2} \right), \cos^2 \left(\frac{\pi}{m_3} \right), \cos \left(\frac{\pi}{m_1} \right) \cos \left(\frac{\pi}{m_2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{m_3} \right) \right).$$

Dann ist G genau dann arithmetisch, falls einer der beiden folgenden Fälle eintritt.

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{F} \not\subseteq \mathbb{Q}$ und für jeden Isomorphismus $\sigma: \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}$, $\sigma \neq \text{Id}$, ist die Ungleichung

$$\sigma \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{m_1} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{m_2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{m_3} \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi}{m_1} \right) \cos \left(\frac{\pi}{m_2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{m_3} \right) - 1 \right) < 0$$

erfüllt.

In [Tak77a] und [Tak77b] klassifiziert K. Takeuchi alle arithmetischen Dreiecksgruppen der ersten Art und weist nach, dass diese in 18 Kommensurabilitätsklassen im weiten Sinn über insgesamt 13 Körpern einzuordnen sind. Die folgende Tabelle enthält die vollständige Auflistung.

Klasse	Signatur (m_1, m_2, m_3)	Körper \mathbb{F}
I	(2,4,6) (2,6,6) (3,4,4) (3,6,6)	\mathbb{Q}
II	(2,3,8) (2,4,8) (2,6,8) (2,8,8) (3,3,4) (3,8,8) (4,4,4) (4,6,6) (4,8,8)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
III	(2,3,12) (2,6,12) (3,3,6) (3,4,12) (3,12,12) (6,6,6)	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
IV	(2,4,12) (2,12,12) (4,4,6) (6,12,12)	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
V	(2,4,5) (2,4,10) (2,5,5) (2,10,10) (4,4,5) (5,10,10)	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
VI	(2,5,6) (3,5,5)	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
VII	(2,3,10) (2,5,10) (3,3,5) (5,5,5)	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
VIII	(3,4,6)	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$
IX	(2,3,7) (2,3,14) (2,4,7) (2,7,7) (2,7,14) (3,3,7) (7,7,7)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/7))$
X	(2,3,9) (2,3,18) (2,9,18) (3,3,9) (3,6,18) (9,9,9)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/9))$
XI	(2,4,18) (2,18,18) (4,4,9) (9,18,18)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/9))$
XII	(2,3,16) (2,8,16) (3,3,8) (4,16,16) (8,8,8)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/8))$
XIII	(2,5,20) (5,5,10)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/10))$
XIV	(2,3,24) (2,12,24) (3,3,12) (3,8,24) (6,24,24) (12,12,12)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/12))$
XV	(2,5,30) (5,5,15)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/15))$
XVI	(2,3,30) (2,15,30) (3,3,15) (3,10,30) (15,15,15)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/15))$
XVII	(2,5,8) (4,5,5)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$
XVIII	(2,3,11)	$\mathbb{Q}(\cos(\pi/11))$

Beispiel. Im folgenden soll etwas ausführlicher aufgezeigt werden, warum die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 7)$ nicht-arithmetisch ist. Durch die in den vorangegangenen Kapiteln hergeleitete Darstellung von Dreiecksgruppenelementen ist es nämlich möglich, dies nachzuweisen, ohne Takeuchis Kriterium 4.21 zu verwenden.

Die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 7)$ wird nach Korollar 3.42 erzeugt von

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta q \\ \sin \beta \frac{1}{q} & -\cos \beta \end{pmatrix},$$

dabei gilt nach Lemma 3.38

$$q = \frac{1+B}{1-B}, \quad B = \sqrt{\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma}{\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{5}, \quad \gamma = \frac{\pi}{7}.$$

Die der Dreiecksgruppe zugeordnete Quaternionenalgebra ist nach Korollar 3.42 und den Ergebnissen von Abschnitt 3.5

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha \sin \beta q & c \sin \alpha + d \sin \beta q \\ -c \sin \alpha - d \sin \beta \frac{1}{q} & a + b \sin \alpha \sin \beta \frac{1}{q} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

über dem Körper

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \{(x_1 + x_2 \cos \beta) + (x_3 + x_4 \cos \beta) \cos \gamma + (x_5 + x_6 \cos \beta) \cos^2 \gamma \mid x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{Q}\}.$$

Die Quaternionenalgebra ist nach Korollar 3.55 isomorph zu

$$M \cong A = \left(\frac{\tilde{a}, \tilde{b}}{\mathbb{F}} \right), \text{ mit } \tilde{a} = (2 - \cos^2 \beta)D, \quad \tilde{b} = D - \sin^2 \alpha,$$

$$D = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1.$$

Das Minimalpolynom von $\cos \beta$ über \mathbb{Q} ist $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ und besitzt die Nullstellen $\cos(\pi/5)$ und $\cos(3\pi/5)$. Das Minimalpolynom von $\cos \gamma$ über \mathbb{Q} ist $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ und besitzt die Nullstellen $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$ und $\cos(5\pi/7)$.

Für jeden Isomorphismus $\sigma: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt $\left(\frac{a, b}{\mathbb{R}} \right)^\sigma = \left(\frac{\sigma(a), \sigma(b)}{\mathbb{R}} \right)$.

Die folgende Tabelle enthält alle Galois-Isomorphismen von \mathbb{F} , die Bilder von \tilde{a} , \tilde{b} und der Algebra $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

σ	$\sigma(\cos(\pi/5))$	$\sigma(\cos(\pi/7))$	$\sigma(\tilde{a})$	$\sigma(\tilde{b})$	$A^\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \left(\frac{\sigma(\tilde{a}), \sigma(\tilde{b})}{\mathbb{R}}\right)$
Id	$\cos(\pi/5)$	$\cos(\pi/7)$	1.9444	0.695152	$M(2, \mathbb{R})$
τ	$\cos(3\pi/5)$	$\cos(\pi/7)$	-0.230785	-0.871178	\mathbb{H}
ψ_1	$\cos(\pi/5)$	$\cos(3\pi/7)$	0.180359	-0.615952	$M(2, \mathbb{R})$
ψ_2	$\cos(\pi/5)$	$\cos(5\pi/7)$	-0.284122	-0.961165	\mathbb{H}
$\tau\psi_1$	$\cos(3\pi/5)$	$\cos(3\pi/7)$	-1.28317	-1.42375	\mathbb{H}
$\tau\psi_2$	$\cos(3\pi/5)$	$\cos(5\pi/7)$	-0.139219	-0.8231	\mathbb{H}

Somit gilt

$$A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M(2, \mathbb{R}) \oplus M(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H},$$

und damit kann $\Delta(3, 5, 7)$ nach 4.14(iii) und 4.18 nicht arithmetisch sein.

Bemerkung 4.22 *Ist $D < 0$, so ist $\tilde{a} < 0$ und $\tilde{b} < 0$; d.h. $\left(\frac{\tilde{a}, \tilde{b}}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathbb{H}$. Ist $D > 0$, so ist $\tilde{a} > 0$; d.h. $\left(\frac{\tilde{a}, \tilde{b}}{\mathbb{R}}\right) \cong M(2, \mathbb{R})$. Das ist aber die Aussage von Theorem 4.21.*

4.2 Der nicht-arithmetische Fall

Untersucht werden Homomorphismen, die Dreiecksgruppen auf alternierende Gruppen surjektiv abbilden. Betrachtet wird, ob die Kerne dieser Epimorphismen in $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zueinander sind. In den folgenden Abschnitten soll zunächst die Herleitung des Ergebnisses von G.A. Margulis nachvollzogen werden, welches die Fragestellung für nicht-arithmetische Dreiecksgruppen vollständig klärt.

Dazu müssen zunächst einige besondere Eigenschaften von Dreiecksgruppen aufgezeigt werden. Die Inhalte dieser Einleitung basieren maßgeblich auf [GGD99], [SIS03] und [Bea83].

Die Dreiecksgruppen heben sich von anderen Fuchsschen Gruppen vor allem durch die Eigenschaft ab, dass alle Einbettungen einer Dreiecksgruppe in die Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zueinander sind. Mit dem Symbol $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ wird also eine Fuchssche Gruppe mit der Signatur $(0; m_1, m_2, m_3)$ bezeichnet, die bis auf Konjugation in $PSL(2, \mathbb{R})$ festgelegt ist.

Weiterhin besitzen die Dreiecksgruppen folgende bemerkenswerte Eigenschaft.

Lemma 4.23 ([Bea83]) *Sei G eine diskrete Gruppe konformer Isometrien der hyperbolischen Ebene. Enthält G eine Dreiecksgruppe als Untergruppe, so ist G selbst eine Dreiecksgruppe.*

Definition 4.24 *Eine **maximale** Fuchssche Gruppe ist eine Gruppe, die in keiner anderen Fuchsschen Gruppe enthalten ist.*

Das folgende Theorem listet alle bestehenden Inklusionen unter den Dreiecksgruppen auf und bestimmt damit auch alle maximalen Dreiecksgruppen.

Theorem 4.25 (Singerman, [Sin72]) *Die komplette Liste aller Dreiecksgruppen, die in anderen Dreiecksgruppen enthalten sind, lautet*

$\Delta(n, n, n)$	\triangleleft	$\Delta(3, 3, n)$	vom Index 3,
$\Delta(n, n, n)$	\triangleleft	$\Delta(2, 3, 2n)$	vom Index 6,
$\Delta(n_1, n_1, n_2)$	\triangleleft	$\Delta(2, n_1, 2n_2)$	vom Index 2,
$\Delta(7, 7, 7)$	$<$	$\Delta(2, 3, 7)$	vom Index 24,
$\Delta(2, 7, 7)$	$<$	$\Delta(2, 3, 7)$	vom Index 9,
$\Delta(3, 3, 7)$	$<$	$\Delta(2, 3, 7)$	vom Index 8,
$\Delta(4, 8, 8)$	$<$	$\Delta(2, 3, 8)$	vom Index 12,
$\Delta(3, 8, 8)$	$<$	$\Delta(2, 3, 8)$	vom Index 10,
$\Delta(9, 9, 9)$	$<$	$\Delta(2, 3, 9)$	vom Index 12,
$\Delta(4, 4, 5)$	$<$	$\Delta(2, 4, 5)$	vom Index 6,
$\Delta(n, 4n, 4n)$	$<$	$\Delta(2, 3, 4n)$	vom Index 6,
$\Delta(n, 2n, 2n)$	$<$	$\Delta(2, 4, 2n)$	vom Index 4,
$\Delta(3, n, 3n)$	$<$	$\Delta(2, 3, 3n)$	vom Index 4,
$\Delta(2, n, 2n)$	$<$	$\Delta(2, 3, 2n)$	vom Index 3.

Zur Darstellung der Ergebnisse von Margulis werden folgende Definitionen und Aussagen benötigt.

Definition 4.26 *Zwei Fuchssche Gruppen G_1, G_2 sind **kommensurabel**, falls ihr Durchschnitt $G_1 \cap G_2$ endlichen Index in G_1 und G_2 besitzt.*

Definition 4.27 ([SIS03]) G sei eine Fuchssche Gruppe, dessen Fundamentalbereich einen endlichen hyperbolischen Flächeninhalt besitze. Dann bezeichne

$$\text{Comm}(G) = \{t \in PGL(2, \mathbb{R}) \mid G \text{ und } G^t = t^{-1}Gt \text{ sind kommensurabel}\}$$

den **Kommensurator** von G . Weiterhin sei $\text{Comm}^+(G)$ diejenige Untergruppe von $\text{Comm}(G)$, die alle konformen Elemente des Kommensurators enthält, d.h.

$$\begin{aligned} \text{Comm}^+(G) &= \text{Comm}(G) \cap PSL(2, \mathbb{R}) \\ &= \{t \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid G \text{ und } G^t \text{ sind kommensurabel}\}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung des Kommensurators wird vor allem durch das folgende Theorem von Margulis [Mar91] hervorgehoben.

Theorem 4.28 (Margulis)

- (1) *Formulierung in [SIS03]: Sei G eine Fuchssche Gruppe mit endlichem Fundamentalbereich. G ist genau dann Untergruppe von endlichem Index in $\text{Comm}(G)$, wenn G nicht-arithmetisch ist.*
- (2) *Formulierung in [GGD99]: Für eine Fuchssche Gruppe G ist $\text{Comm}^+(G)$ genau dann eine Fuchssche Gruppe, falls G nicht-arithmetisch ist.*

Damit lässt sich die angekündigte Aussage wie folgt beweisen.

Theorem 4.29 Ist $G = \Delta(m_1, m_2, m_3) < PSL(2, \mathbb{R})$ eine maximale nicht-arithmetische Dreiecksgruppe, dann gibt es für zwei voneinander verschiedene Normalteiler $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ von endlichem Index kein Element $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $N_1^h = N_2$.

Beweis. Die Annahme der Existenz eines $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $N_1^h = N_2$ führt zu einem Widerspruch, falls $h \in G$ gezeigt wird, da N_1 und N_2 nach Voraussetzung in G nicht zueinander konjugiert sind.

Da G nicht-arithmetisch ist, ist G nach Theorem 4.28 (1) eine Untergruppe von $\text{Comm}(G)$ von endlichem Index. Da G eine Fuchssche Gruppe ist, ist G sogar in $\text{Comm}^+(G)$ enthalten. Nach Lemma 4.23 ist $\text{Comm}^+(G)$ eine Dreiecksgruppe. Aus der Maximalität von G folgt damit $G = \text{Comm}^+(G)$.

N_1 und N_2 sind als Normalteiler von endlichem Index in G kommensurabel. Da sie nach Annahme in $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zueinander sind, liegt das konjugierende Element im Kommensurator. Das sieht man wie folgt: Da N_1 und N_2 Normalteiler von endlichem Index in G sind, folgt aus

$$\begin{aligned} N_2 &\leq G \cap G^h \leq G \quad \text{und} \\ N_1^h &\leq G \cap G^h \leq G \end{aligned}$$

sofort $h \in \text{Comm}(G)$. Damit erhält man unter Ausnutzung der Voraussetzung $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ sofort den Widerspruch

$$h \in \text{Comm}(G) \cap PSL(2, \mathbb{R}) = \text{Comm}^+(G) = G. \quad \square$$

4.3 Der arithmetische Fall

Im folgenden soll eine Methode entwickelt werden, die es ermöglicht, ähnliche Ergebnisse wie Theorem 4.29 für arithmetische Dreiecksgruppen zu erhalten. Zur Auswahl eines geeigneten Beispiels kann die von K. Takeuchi ermittelte Klassifikation aller arithmetischen Dreiecksgruppen vom Abschnitt 4.1 verwendet werden.

Die folgende Tabelle enthält für jede der 76 arithmetischen Dreiecksgruppen die Gesamtzahl der Epimorphismen in die alternierenden Gruppen A_3, \dots, A_{10} . Die Spaltenüberschrift e_i ($i \in \{3, \dots, 10\}$) bezeichnet dabei die Anzahl der nicht durch A_n -Konjugation auseinander hervorgehenden Epimorphismen in die alternierende Gruppe A_i . Dabei ist folgendes zu beachten:

- 1. Zu jeder Gruppe wurde angegeben, ob sie in einer maximalen Dreiecksgruppe als Untergruppe enthalten ist. Dazu wurde ausschließlich das Kriterium 4.25 verwendet.

2. Eine Untergruppe U einer Gruppe G kann mehr Epimorphismen in eine feste alternierende Gruppe A_n besitzen als G selbst. So ist beispielsweise $\Delta(3, 6, 6)$ enthalten in $\Delta(2, 4, 6)$ und besitzt drei Epimorphismen in die A_7 ; die Obergruppe $\Delta(2, 4, 6)$ dagegen nicht einen einzigen. Dies ist immer dann der Fall, wenn sich die Homomorphismen der Untergruppe nicht derart auf die Obergruppe erweitern lassen, dass das Bild die alternierende Gruppe bleibt.
3. Ist eine arithmetische Dreiecksgruppe U isomorph zu einer Untergruppe einer Dreiecksgruppe G , so wurde dies in der Tabelle durch die Schreibweise $U \lesssim G$ zum Ausdruck gebracht. Dazu wurde zum einen die wohlbekannte Isomorphie

$$\Delta(p, q, r) \cong \Delta(q, r, p) \cong \Delta(q, p, r)$$

und zum anderen Theorem 4.25 verwendet. Konkrete Ausführung einiger Beispiele:

- (a) Es gilt $\Delta(3, 4, 4) \cong \Delta(4, 4, 3) < \Delta(2, 4, 6) \implies \Delta(3, 4, 4) \lesssim \Delta(2, 4, 6)$.
- (b) Gilt für beliebige Gruppen die Relation

$$A \cong B < C \cong D,$$

so besitzt D eine zu B isomorphe Untergruppe E . Damit gilt

$$E < D \text{ und } E \cong B,$$

woraus

$$A \lesssim D$$

folgt. Diese Überlegungen kommen zum Beispiel bei

$$\Delta(2, 6, 6) \cong \Delta(6, 6, 2) < \Delta(2, 6, 4) \cong \Delta(2, 4, 6) \implies \Delta(2, 6, 6) \lesssim \Delta(2, 4, 6)$$

oder ähnlichen Konstellationen zum Einsatz.

- (c) Eine Weiterführung dieser Ideen führt zu

$$(3, 12, 12) \cong (12, 12, 3) < (2, 12, 6) \cong (2, 6, 12) < (2, 3, 12) \implies (3, 12, 12) \lesssim (2, 3, 12)$$

4. Soll für eine vorgegebene Dreiecksgruppe $\Delta(p, q, r)$ ein Epimorphismus in eine alternierende Gruppe A_n existieren, so muss bis auf eine Ausnahme $n \geq K_{p,q,r} = \max\{k_p, k_q, k_r\}$ gewählt werden, wobei k_s der kleinste Primteiler der natürlichen Zahl s ist.

Ist $n < K_{p,q,r}$, so gibt es in der alternierenden Gruppe A_n keine Elemente X, Y, Z , die die Bedingung $X^p = Y^q = Z^r = 1$ erfüllen.

Die einzige Ausnahme tritt in dem Fall auf, in dem die Bilder der Erzeuger x, y einer Dreiecksgruppe

$$\Delta(p, q, r) = \langle x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = 1 \rangle$$

in der alternierenden Gruppe invers zueinander sind, so dass die Relation $(xy)^r = 1$ trivial erfüllt ist.

Dieser Fall tritt beispielsweise für alle Dreiecksgruppen der Signatur $\Delta(3, 3, r)$ auf, falls Epimorphismen in die A_3 gesucht werden. Setzt man

$$\begin{aligned} X &= \varphi(x) = (1, 2, 3), \\ Y &= \varphi(y) = (1, 3, 2), \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= A_3 \text{ und} \\ X^3 &= Y^3 = (XY)^r = 1 \end{aligned}$$

für alle natürlichen Zahlen r , da $XY = 1$ gilt.

Dieser Sonderfall wurde in der Tabelle bei der Dreiecksgruppe $\Delta(3, 3, 7)$ berücksichtigt, indem in der ersten Spalte eine in Klammern gesetzte 1 eingetragen wurde.

Für alle anderen Indizes $n < K_{p,q,r}$ wurde das Symbol „-“ als Eintrag benutzt.

5. Wie im letzten Punkt schon angedeutet wurde, soll hier noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass generell nicht darauf geachtet wurde, ob die Bilder der Erzeuger der Dreiecksgruppe die korrekte Ordnung besitzen.

Es ist also nicht in jedem Fall sichergestellt, dass für eine Dreiecksgruppe

$$\Delta(p, q, r) = \langle x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = 1 \rangle$$

die Bedingungen

$$o(\varphi(x)) = p, o(\varphi(y)) = q, o(\varphi(xy)) = r$$

erfüllt sind, vielmehr gilt lediglich

$$o(\varphi(x)) \mid p, o(\varphi(y)) \mid q, o(\varphi(xy)) \mid r.$$

6. Im Abschnitt 2.3 wird das Theorem 2.18 als Schlussfolgerung aus der *Genus formula* hergeleitet.

Weiterhin wurde festgestellt, dass sich dieses Theorem hervorragend dazu nutzen lässt, für eine vorgegebene Dreiecksgruppe einige Werte n auszuschließen, für die kein Epimorphismus in die alternierende Gruppe A_n existiert.

Für die entsprechenden 7 Dreiecksgruppen wurden Fußnoten angebracht, in denen die auszuschließenden Werte für n angegeben werden.

Zur Berechnung wurde das Computer-Algebra-Programm GAP mit den im Abschnitt 2.5 vorgestellten Funktionen verwendet.

Dreiecksgruppe	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
$\Delta(2, 4, 6)$	0	0	0	0	0	0	4	0
$\Delta(2, 6, 6) \lesssim \Delta(2, 4, 6)$	1	1	0	0	0	0	4	0
$\Delta(3, 4, 4) \lesssim \Delta(2, 4, 6)$	0	0	0	0	4	0	11	12
$\Delta(3, 6, 6) < \Delta(2, 4, 6)$	4	3	0	0	3	17	49	82
$\Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	0	0	0	0	3
$\Delta(2, 4, 8) < \Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	0	0	0	0	3
$\Delta(2, 6, 8)$	0	0	0	0	0	0	4	22
$\Delta(2, 8, 8) < \Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	0	0	0	0	33
$\Delta(3, 3, 4) \triangleleft \Delta(2, 3, 8)$	1	1	0	1	0	0	0	3
$\Delta(3, 8, 8) < \Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	0	4	0	11	396
$\Delta(4, 4, 4) \triangleleft \Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	1	12	18	42	15
$\Delta(4, 6, 6) \lesssim \Delta(2, 6, 8)$	1	1	0	1	8	94	320	229
$\Delta(4, 8, 8) < \Delta(2, 3, 8)$	0	0	0	1	12	18	42	1060
$\Delta(2, 3, 12)$	1	1	0	0	0	0	0	3
$\Delta(2, 6, 12) < \Delta(2, 3, 12)$	1	1	0	0	0	0	14	21
$\Delta(3, 3, 6) \triangleleft \Delta(2, 3, 12)$	4	2	0	0	1	0	0	9
$\Delta(3, 4, 12) < \Delta(2, 3, 12)$	1	1	0	1	7	7	53	127
$\Delta(3, 12, 12) \lesssim \Delta(2, 3, 12)$	4	3	0	2	13	31	244	1105
$\Delta(6, 6, 6) < \Delta(2, 3, 12)$	4	4	0	0	7	186	663	516
$\Delta(2, 4, 12)$	0	0	0	0	0	0	7	4
$\Delta(2, 12, 12) \lesssim \Delta(2, 4, 12)$	1	1	0	0	0	0	33	94
$\Delta(4, 4, 6) \triangleleft \Delta(2, 4, 12)$	0	0	0	0	10	48	128	80
$\Delta(6, 12, 12) < \Delta(2, 4, 12)$	4	4	0	2	33	422	2649	8589
$\Delta(2, 4, 5)$	–	–	0	1	0	0	0	0
$\Delta(2, 4, 10)$	0	0	0	1	0	0	1	0
$\Delta(2, 5, 5) \lesssim \Delta(2, 4, 5)$	–	–	1	1	0	0	0	0
$\Delta(2, 10, 10) \lesssim \Delta(2, 4, 10)$	0	0	1	1	0	0	1	10
$\Delta(4, 4, 5) \triangleleft \Delta(2, 4, 10)$	–	–	0	4	11	9	1	53
$\Delta(5, 10, 10) < \Delta(2, 4, 10)$	–	–	3	6	1	0	1	337
$\Delta(2, 5, 6)$	–	–	1	0	0	0	0	6
$\Delta(3, 5, 5) \lesssim \Delta(2, 5, 6)^{10}$	–	–	2	1	3	–	–	22

¹⁰Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(3, 5, 5)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{8, 14\}$.

$\Delta(2, 3, 10)$		0	0	1	0	0	0	0	0
$\Delta(2, 5, 10) < \Delta(2, 3, 10)$		–	–	1	1	0	0	0	5
$\Delta(3, 3, 5) \triangleleft \Delta(2, 3, 10)$		–	–	1	1	1	0	0	7
$\Delta(5, 5, 5) \triangleleft \Delta(2, 3, 10)^{11}$		–	–	1	4	1	–	–	64
$\Delta(3, 4, 6)$		1	1	0	1	3	7	26	33
$\Delta(2, 3, 7)^{12}$		–	–	–	–	0	0	0	–
$\Delta(2, 3, 14)$		0	0	0	0	0	0	0	0
$\Delta(2, 4, 7)$		–	–	–	–	2	0	4	0
$\Delta(2, 7, 7) < \Delta(2, 3, 7)^{13}$		–	–	–	–	3	3	4	–
$\Delta(2, 7, 14) < \Delta(2, 3, 14)$		–	–	–	–	3	3	4	0
$\Delta(3, 3, 7) \triangleleft \Delta(2, 3, 14)^{14}$	(1)	–	–	–	–	2	0	5	1
$\Delta(7, 7, 7) \triangleleft \Delta(2, 3, 14)^{15}$		–	–	–	–	23	177	68	1
$\Delta(2, 3, 9)$		1	1	0	0	0	0	0	6
$\Delta(2, 3, 18)$		1	1	0	0	0	0	0	6
$\Delta(2, 9, 18) < \Delta(2, 3, 18)$		1	1	0	0	0	0	51	154
$\Delta(3, 3, 9) \triangleleft \Delta(2, 3, 18)$		4	1	0	0	0	0	6	42
$\Delta(3, 6, 18) < \Delta(2, 3, 18)$		4	3	0	0	3	17	154	391
$\Delta(9, 9, 9) \triangleleft \Delta(2, 3, 18)$		4	1	0	0	0	0	1278	10692
$\Delta(2, 4, 18)$		0	0	0	0	0	0	16	16
$\Delta(2, 18, 18) \lesssim \Delta(2, 4, 18)$		1	1	0	0	0	0	79	184
$\Delta(4, 4, 9) \triangleleft \Delta(2, 4, 18)$		0	0	0	0	4	0	239	380
$\Delta(9, 18, 18) < \Delta(2, 4, 18)$		4	3	0	0	3	17	4405	21946
$\Delta(2, 3, 16)$		0	0	0	0	0	0	0	3
$\Delta(2, 8, 16) < \Delta(2, 3, 16)$		0	0	0	0	0	0	0	33
$\Delta(3, 3, 8) \triangleleft \Delta(2, 3, 16)$		1	1	0	1	0	0	0	31
$\Delta(4, 16, 16) < \Delta(2, 3, 16)$		0	0	0	1	12	18	42	1060
$\Delta(8, 8, 8) \triangleleft \Delta(2, 3, 16)$		0	0	0	1	12	18	42	4228
$\Delta(2, 5, 20)$		0	0	1	2	0	0	0	5
$\Delta(5, 5, 10) \triangleleft \Delta(2, 5, 20)$		–	–	2	5	1	0	0	143
$\Delta(2, 3, 24)$		1	1	0	0	0	0	0	6
$\Delta(2, 12, 24) < \Delta(2, 3, 24)$		1	1	0	0	0	0	33	161
$\Delta(3, 3, 12) \triangleleft \Delta(2, 3, 24)$		4	2	0	1	1	0	4	42
$\Delta(3, 8, 24) < \Delta(2, 3, 24)$		1	1	0	1	7	7	53	1016
$\Delta(6, 24, 24) < \Delta(2, 3, 24)$		4	4	0	2	33	422	2649	19459
$\Delta(12, 12, 12) \triangleleft \Delta(2, 3, 24)$		4	4	0	4	73	630	4993	27009
$\Delta(2, 5, 30)$		0	0	2	1	0	1	0	16
$\Delta(5, 5, 15) \triangleleft \Delta(2, 5, 30)$		–	–	3	5	4	3	0	195
$\Delta(2, 3, 30)$		1	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta(2, 15, 30) < \Delta(2, 3, 30)$		1	1	3	1	0	11	20	21
$\Delta(3, 3, 15) \triangleleft \Delta(2, 3, 30)$		4	1	1	1	1	2	5	14
$\Delta(3, 10, 30) < \Delta(2, 3, 30)$		1	1	5	2	7	8	55	264
$\Delta(15, 15, 15) \triangleleft \Delta(2, 3, 30)$		4	1	10	10	13	134	356	1256
$\Delta(2, 5, 8)$		–	–	0	1	0	0	0	14
$\Delta(4, 5, 5) \lesssim \Delta(2, 5, 8)$		–	–	1	5	4	2	0	82
$\Delta(2, 3, 11)^{16}$		–	–	–	–	–	–	–	–

Als Beispiel wurde die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ ausgewählt, da sie die einzige arithmetische Dreiecksgruppe ist, die genau zwei Epimorphismen in die A_5 besitzt, die nicht durch A_5 -Konjugation auseinander hervorgehen und für die die Ordnungen der Bilder der Erzeuger der Dreiecksgruppe

¹¹Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(5, 5, 5)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{8, 9, 14\}$.

¹²Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(2, 3, 7)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 23, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 59, 61, 62, 67, 68, 69, 74, 75, 76, 82, 83, 89, 90, 95, 97, 103, 104, 110, 111, 118, 125, 131, 139, 146, 167\}$.

¹³Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(2, 7, 7)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{10, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 26, 27, 34\}$.

¹⁴Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(3, 3, 7)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{11, 13, 20\}$.

¹⁵Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(7, 7, 7)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{11, 12, 13, 20\}$.

¹⁶Nach Theorem 2.18 gibt es für $\Delta(2, 3, 11)$ keinen Epimorphismus in die A_n für $n \in \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 50, 51, 52, 53, 54, 62, 63, 64, 65, 74, 75, 76, 86, 87, 98\}$.

wirklich 3, 5 und 5 sind. Die Eigenschaft arithmetisch war wichtig, um eine Analogie zur Anwendung 4.29 des Theorems von Margulis herstellen zu können. Es wurden Epimorphismen in eine relativ kleine alternierende Gruppe gewählt, um das Beispiel möglichst klein zu halten. Die Wahl einer Dreiecksgruppe, die nur zwei Epimorphismen besitzt, ist erfolgt, um die Anzahl der möglichen Konjugiertheitsbetrachtungen zwischen den einzelnen Normalteilern so gering wie möglich zu halten.

Im folgenden soll die Frage geklärt werden, ob die beiden Normalteiler $N_1, N_2 < \Delta(3, 5, 5)$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Falls Konjugiertheit besteht, so klärt das nächste Theorem, in welcher Menge das konjugierende Element zu suchen ist.

Theorem 4.30 ([SW01]) *Seien N_1 und N_2 zwei voneinander verschiedene torsionsfreie Normalteiler der Fuchsschen Dreiecksgruppe Δ mit isomorphen Faktorgruppen $\Delta/N_1 \cong G \cong \Delta/N_2$. Die Riemannschen Flächen \mathcal{H}^2/N_1 und \mathcal{H}^2/N_2 sind genau dann isomorph, falls die beiden folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

1. N_1 und N_2 sind konjugiert in $PSL(2, \mathbb{R})$.
2. N_1 und N_2 sind konjugiert in einer Dreiecksgruppe $\bar{\Delta} \supset \Delta$.

Dabei heißt eine Untergruppe einer Fuchsschen Gruppe *torsionsfrei*, falls sie keine Elemente endlicher Ordnung besitzt. Die Voraussetzung der Torsionsfreiheit der Normalteiler wird im obigen Theorem nur benötigt, um kompakte Riemannsche Flächen höheren Geschlechts zu erhalten, siehe [Wol01]. In der folgenden Argumentation wird in diesem Theorem ausschließlich von der Äquivalenz der beiden Bedingungen Gebrauch gemacht und diese ist unabhängig von der Torsionsfreiheit der beiden Normalteiler.

Nach Theorem 4.25 ist die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ nur in genau einer anderen Dreiecksgruppe enthalten; sie ist Untergruppe der maximalen arithmetischen Dreiecksgruppe $\Delta(2, 5, 6)$ vom Index 2, also sogar Normalteiler.

Im ersten Schritt muss ermittelt werden, wie die $\Delta(3, 5, 5)$ in die $\Delta(2, 5, 6)$ eingebettet ist. Dazu werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} \Delta(3, 5, 5): \alpha_1 &= \frac{\pi}{3}, \beta_1 = \gamma_1 = \frac{\pi}{5} \\ \Delta(2, 5, 6): \alpha_2 &= \frac{\pi}{2}, \beta_2 = \frac{\pi}{5}, \gamma_2 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Weiterhin werden auch die Bezeichnungen von Korollar 3.42 mit den entsprechenden Indizes versehen:

$$B_1 = \sqrt{\frac{\cos(\alpha_1 + \beta_1) + \cos \gamma_1}{\cos(\alpha_1 - \beta_1) + \cos \gamma_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{-1 + 3\sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}},$$

$$q_1 = \frac{1 + B_1}{1 - B_1},$$

$$\Delta(3, 3, 5) \subset M_1 = \{ [a, b, c, d]_1 \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_1 \},$$

$$[a, b, c, d]_1 = \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha_1 \sin \beta_1 q_1 & c \sin \alpha_1 + d \sin \beta_1 q_1 \\ -c \sin \alpha_1 - d \sin \beta_1 \frac{1}{q_1} & a + b \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \frac{1}{q_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{Q}(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1) = \mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{5}),$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{\cos(\alpha_2 + \beta_2) + \cos \gamma_2}{\cos(\alpha_2 - \beta_2) + \cos \gamma_2}} = \sqrt{-4 + 3\sqrt{5} - \sqrt{60 - 24\sqrt{5}}},$$

$$q_2 = \frac{1 + B_2}{1 - B_2} = \frac{1}{2} q_1 - \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3}{10} \sqrt{5}},$$

$$\Delta(2, 5, 6) \subset M_2 = \{ [a, b, c, d]_2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_2 \},$$

$$[a, b, c, d]_2 = \begin{pmatrix} a + b \sin \alpha_2 \sin \beta_2 q_2 & c \sin \alpha_2 + d \sin \beta_2 q_2 \\ -c \sin \alpha_2 - d \sin \beta_2 \frac{1}{q_2} & a + b \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \frac{1}{q_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Q}(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2) = \mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

Rein formal lässt sich der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Elemente von M_1 und M_2 wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} [a, b, c, d]_1 &= \left[a - \frac{3}{8} (3 - \sqrt{5}) b, \sqrt{3} b, \frac{1}{2} \sqrt{3} c - \frac{1}{4} \sqrt{3} (3 - \sqrt{5}) d, 2d \right]_2 \\ [a, b, c, d]_2 &= \left[a + \frac{1}{8} \sqrt{3} (3 - \sqrt{5}) b, \frac{1}{3} \sqrt{3} b, \frac{2}{3} \sqrt{3} c + \frac{1}{4} (3 - \sqrt{5}) d, \frac{1}{2} d \right]_1, \end{aligned}$$

woraus wegen $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ sofort $M_1 \subset M_2$ folgt. Allerdings ist die Dreiecksgruppe $\Delta(3, 5, 5)$ nicht in der $\Delta(2, 5, 6)$ enthalten, wenn die obigen Definitionen verwendet werden. Da aber nach [Bea83] alle $PSL(2, \mathbb{R})$ -Einbettungen einer Dreiecksgruppe konjugiert zueinander sind, gilt

$$\Delta(3, 5, 5)^h \triangleleft_{(2)} \Delta(2, 5, 6)$$

für ein geeignetes $h \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Im folgenden wird die Existenz dieses konjugierenden Elementes nachgewiesen, und es wird sich herausstellen, dass sogar $h \in M_2$ gilt. Bezeichnet man die Erzeuger der Dreiecksgruppe nach Bemerkung 3.34 mit

$$\begin{aligned} \Delta(3, 5, 5) &= \langle x_1, y_1 \mid x_1^3 = y_1^5 = (x_1 y_1)^5 = 1 \rangle, \\ \Delta(2, 5, 6) &= \langle x_2, y_2 \mid x_2^2 = y_2^5 = (x_2 y_2)^6 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

so gilt:

- (1) Das Element $x_3 = (x_2 y_2)^2$ hat Ordnung 3.
- (2) Das Element $y_3 = (x_2 y_2)^{-2} y_2$ hat Ordnung 5.
- (3) Das Element $x_3 y_3 = y_2$ hat Ordnung 5.

Die Ordnung des Elementes y_3 ergibt sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned} y_3^5 &= [(x_2 y_2)^{-2} y_2]^5 = [y_2^{-1} x_2^{-1} y_2^{-1} x_2^{-1} y_2]^5 \\ &= y_2^{-1} x_2^{-1} y_2^{-1} x_2^{-1} y_2 \\ &= y_2^{-1} x_2^{-1} (y_2^{-1})^5 x_2^{-1} y_2 = y_2^{-1} x_2^{-2} y_2 = 1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.41 erhält man die Darstellungen

$$\begin{aligned} x_2 y_2 &= [-\cos \alpha_2, 0, -1, 0]_2 \cdot [-\cos \beta_2, 0, 0, -1]_2 = \left[-\sqrt{3}, 1, \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1), 0 \right]_2, \\ x_3 &= (x_2 y_2)^2 = \left[2, -\sqrt{3}, -\frac{1}{4} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1), 0 \right]_2, \\ y_3 &= (x_2 y_2)^{-2} y_2 = (x_2 y_2)^4 y_2 = \left[1, -\sqrt{3}, -\frac{1}{4} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1), 0 \right]_2 \cdot \left[-\cos \beta_2, 0, 0, -1 \right]_2 \\ &= \left[-(\sqrt{5} + 1), \frac{1}{2} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1), -\frac{1}{4} \sqrt{3} (1 - \sqrt{5}), 2 \right]_2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des obigen Zusammenhangs erhält man folgende äquivalente Darstellungen in M_1 :

$$\begin{aligned} x_3 &= \left[\frac{1}{8} (3\sqrt{5} + 7), -1, -\frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1), 0 \right]_1 \quad \text{und} \\ y_3 &= \left[-\frac{1}{8} (5\sqrt{5} + 11), \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1), 1, 1 \right]_1. \end{aligned}$$

Wegen

$$\text{tr}(x_3) = 1 = -\text{tr}(x_1) \quad \text{und} \quad \text{tr}(y_3) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \text{tr}(y_1)$$

sind nach Lemma 3.56 sowohl x_1 und x_3 , als auch y_1 und y_3 in $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugiert zueinander. Im folgenden wird rein formal x_3 durch $-x_3$ ersetzt. Dadurch ändert sich das dargestellte Element in $PSL(2, \mathbb{R})$ nicht, aber es gilt jetzt $\text{tr}(x_3) = \text{tr}(x_1)$.

Im nächsten Schritt wird das gesuchte Element $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}x_1^h &= x_3, \\ y_1^h &= y_3\end{aligned}$$

bestimmt. Nach Theorem 3.60 erhält man ein Element $h_x \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $x_1^{h_x} = x_3$ durch die folgende Festlegung:

$$\begin{aligned}\text{Ist } x_1 &= \begin{pmatrix} x_{1,a} & x_{1,b} \\ x_{1,c} & x_{1,d} \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} x_{3,a} & x_{3,b} \\ x_{3,c} & x_{3,d} \end{pmatrix}, \\ \text{so setze } h_x &= \begin{pmatrix} x_{1,b} & 0 \\ x_{3,a} - x_{1,a} & x_{3,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{\frac{15}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{5}}q_2 - \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ein kurzer Test zeigt, dass dieses Element h_x noch nicht das gewünschte h ist, da zwar $x_1^{h_x} = x_3$, aber nicht $y_1^{h_x} = y_3$ gilt. Nach Lemma 3.63 ist h_x jedoch nicht das einzige Element, das x_1 in x_3 konjugiert. Vielmehr gilt

$$\{h \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid x_1^h = x_3\} = \{h_c h_x \mid h_c \in \mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(x_1)\}.$$

Nach Lemma 3.61(c) gilt

$$\mathbb{C}_{PSL(2, \mathbb{R})}(x_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ x_1 + \tilde{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \tilde{h} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit erhält man insgesamt

$$\{h \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid x_1^h = x_3\} = \{h_x\} \cup \left\{ \left(x_1 + \tilde{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot h_x \mid \tilde{h} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nun muss nur das korrekte $\tilde{h} \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass für das resultierende

$$h = \left(x_1 + \tilde{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot h_x$$

die Bedingung

$$y_1^h = y_3$$

erfüllt ist. Es entstehen vier quadratische Gleichungen für \tilde{h} , die als einzige gemeinsame Lösung

$$\tilde{h} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5} - \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{5} + \frac{15}{8}} \frac{1}{q_2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1) \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \frac{1}{q_2}$$

besitzen. Mit diesem \tilde{h} besitzt das gesuchte Element h die Form

$$\begin{aligned}h &= \left(x_1 + \tilde{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot h_x \\ &= \left[\frac{3}{8}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2), -\frac{1}{4}\sqrt{3}(3 + \sqrt{5}), -\frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1), 0 \right]_1 \\ &= \left[\frac{3}{8}\sqrt{3}(\sqrt{5} + 3), -\frac{3}{4}(\sqrt{5} + 3), -\frac{3}{8}(\sqrt{5} + 1), 0 \right]_2.\end{aligned}$$

Das folgende Korollar fasst das erhaltene Resultat zusammen. Dabei wird jetzt bewusst nicht zwischen x_3 und $-x_3$ unterschieden, da in $PSL(2, \mathbb{R})$ beide Elemente als gleich betrachtet werden.

Korollar 4.31 Die Dreiecksgruppe $\Delta(2, 5, 6) = \langle x_2, y_2 \rangle$ besitzt die Untergruppe $U = \langle x_3, y_3 \rangle$ mit

$$\begin{aligned} x_3 &= (x_2 y_2)^2 && \text{von Ordnung } 3, \\ y_3 &= (x_2 y_2)^{-2} y_2 && \text{von Ordnung } 5, \\ x_3 y_3 &= y_2 && \text{von Ordnung } 5. \end{aligned}$$

Schreibt man $\Delta(3, 5, 5) = \langle x_1, y_1 \rangle$, so gilt

$$x_1^h = x_3, \quad y_1^h = y_3$$

für

$$h = \left[\frac{3}{8} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 3), -\frac{3}{4} (\sqrt{5} + 3), -\frac{3}{8} (\sqrt{5} + 1), 0 \right]_2.$$

Damit gilt

$$\Delta(3, 5, 5)^h = U < \Delta(2, 5, 6).$$

Mit Hilfe von GAP erhält man, dass tatsächlich

$$|\Delta(2, 5, 6) : U| = |\Delta(2, 5, 6) : \langle (x_2 y_2)^2, (x_2 y_2)^{-2} y_2 \rangle| = 2$$

und damit $\Delta(3, 5, 5)^h = U < \Delta(2, 5, 6)$ gilt. Die Rechtsnebenklassen sind $U \backslash \Delta(2, 5, 6) = \{U, U x_2\}$.

Mit Hilfe des Korollars 4.31 ist es nun leicht möglich, die Frage zu klären, ob die beiden Normalteiler $N_1, N_2 < \Delta(3, 5, 5)$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind. Nach Theorem 4.30 ist dies genau der Fall, wenn N_1^h und N_2^h in $\Delta(2, 5, 6)$ zueinander konjugiert sind. Diese Einbettung der Normalteiler in die $\Delta(2, 5, 6)$ kann dadurch erfolgen, dass jeder Erzeuger von N_i mit h konjugiert wird, also rein formal der Homomorphismus

$$\tau : \Delta(3, 5, 5) \mapsto \Delta(2, 5, 6), \quad \tau(x_1) = x_1^h = (x_2 y_2)^2, \quad \tau(y_1) = y_1^h = (x_2 y_2)^{-2} y_2$$

angewendet wird. Damit gilt

$$N_1^h, N_2^h \underset{(60)}{<} \Delta(3, 5, 5)^h \underset{(2)}{<} \Delta(2, 5, 6).$$

Mit Hilfe von GAP wurde folgendes Resultat erhalten.

1. $N_1^h < \Delta(2, 5, 6)$, $\Delta(2, 5, 6)/N_1^h \cong S_5$.
2. $N_2^h < \Delta(2, 5, 6)$, $\Delta(2, 5, 6)/N_2^h \not\cong S_5$.
3. $N_1^h \neq N_2^h$ und damit sind N_1^h und N_2^h nicht konjugiert in $\Delta(2, 5, 6)$.

Korollar 4.32 (Hauptergebnis) Die Dreiecksgruppe

$$\Delta(3, 5, 5) = \langle x, y \mid x^3 = y^5 = (xy)^5 = 1 \rangle$$

besitzt zwei Epimorphismen in die alternierende Gruppe A_5 , die durch

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1, 2, 3), \quad \varphi_1(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_1(xy) = (1, 3, 2, 4, 5) \quad \text{und} \\ \varphi_2(x) &= (1, 2, 4), \quad \varphi_2(y) = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \varphi_2(xy) = (1, 3, 4, 2, 5) \end{aligned}$$

gegeben sind. Die Kerne $N_1 = \ker \varphi_1$ und $N_2 = \ker \varphi_2$ sind in der Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ nicht konjugiert zueinander. Die beiden Riemannschen Flächen \mathcal{H}^2/N_1 und \mathcal{H}^2/N_2 sind damit zwei zueinander nicht isomorphe Riemannsche Flächen mit derselben Automorphismengruppe A_5 und demselben Verzweigungstyp.

Mit diesem Resultat schließt die Diplomarbeit. Anhand eines konkreten Beispiels wurde ein Einblick in die Welt der Fuchsschen Dreiecksgruppen gewonnen. Natürlich öffnet die hier hergeleitete Methode das Tor für weiterführende Fragen. Verallgemeinerungen können nicht nur durch Wahl einer anderen alternierenden Gruppe, sondern auch durch Wechsel der Dreiecksgruppe erreicht werden. Auch zeigt die vorgestellte Methode kein Kriterium auf, das es erlauben würde, allgemeine Aussagen über die Gesamtheit aller Epimorphismen in beliebige alternierende Gruppen zu treffen.

Literatur

Artikel

- [CCR93] C.M. Campbell, M.D.E. Conder, E.F. Robertson, *Defining-relations for Hurwitz groups*, Glasgow Math. J. **36** (1994), pp. 363–370
- [CIW94] P.B. Cohen, C. Itzykson, J. Wolfart, *Fuchsian triangle groups and Grothendieck Dessins*, Communications in Mathematical Physics **163** (1994), pp. 605–627
- [CM88] M.D.E. Conder, J. McKay, *A necessary condition for transitivity of a finite permutation group*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 3, pp. 235–238
- [Con80] M.D.E. Conder, *Generators for alternating and symmetric groups*, Journal London Mathematical Society **22** (1980), no. 2, pp. 75–86
- [Con81] M.D.E. Conder, *More on generators for alternating and symmetric groups*, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford) Ser. 2, **32** (1981), pp. 137–163
- [Con88] M.D.E. Conder, *On the group $G^{6,6,6}$* , Quarterly Journal of Mathematics (Oxford) Ser. 2, **39** (1988), pp. 175–183
- [Con90] M.D.E. Conder, *Hurwitz groups: a brief survey*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **23** (1990), no. 2, pp. 359–370
- [Con01] M.D.E. Conder, *Group actions on graphs, maps and surfaces with maximum symmetry*, Summary, Oxford (2001), <http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/preprints/GroupActions.ps>
- [Cox39] H.S.M. Coxeter, *The abstract groups $G^{m,n,p}$* , Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), pp. 73–150
- [Eve94] B. Everitt, *Permutation representations of the $(2,4,r)$ triangle groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **49** (1994), no. 3, pp. 499–511
- [Eve97] B. Everitt, *Alternating Quotients of the $(3,q,r)$ Triangle Groups*, Comm. Algebra **25** (1997), pp. 1817–1832
- [Eve00] B. Everitt, *Alternating Quotients of Fuchsian Groups*, J. Algebra **223** (2000), pp. 457–476
- [GGD99] E. Girono, G. González-Diez, *On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris **329** (1999), Serie I, pp. 57–60
- [Gre63] L. Greenberg, *Maximal Fuchsian Groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), pp. 569–573
- [Jon98] G.A. Jones, *Characters and surfaces: a survey*, in: R. Curtis, R. Wildon (ed.), *The Atlas of Finite Groups: Ten Years on*, Cambridge University Press, Cambridge 1998, pp. 90–118
- [Mac01] C. Maclachlan, *Introduction to arithmetic Fuchsian groups*, in: E. Bujalance, A.F. Costa, E. Martinez, *Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, pp. 29–41
- [Mac69] A.M. Macbeath, *Generators of the linear fractional groups*, Number Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **12** (1969), American Mathematical Society, Providence, R. I., pp. 14–32
- [Mil01] G.A. Miller, *On the groups generated by two operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1901), pp. 424–426
- [MR92] Q. Mushtaq, G.-C. Rota, *Alternating groups as quotients of two generator groups*, Advances in Mathematics **96** (1992), no. 1, pp. 113–121
- [MS93] Q. Mushtaq, H. Servatius, *Permutation representations of the symmetry groups of regular hyperbolic tessellations*, Journal of the London Mathematics Society **48** (1993), no. 2, pp. 77–86

- [Rei96] P. Reichert, *Beweis eines Satzes über algebraische Zahlen*, Facharbeit, eingereicht in der zehnten Klasse am Georg-Cantor-Gymnasium Halle, April 1996, <http://www.patrick-reichert.de/publikationen/facharb/facharb.dvi>
- [Sin72] D. Singerman, *Finitely maximal Fuchsian groups*, J. London Math. Soc. **6** (1972), no. 2, pp. 29–38
- [SIS03] D. Singerman, R. I. Syddall. *The Riemann surface of a uniform dessin*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry **44** (2003), no. 2, pp. 413–430
- [Sto77] W.W. Stothers, *Subgroups of the $(2, 3, 7)$ triangle group*, Manuscripta math. **20** (1977), pp. 323–334
- [SW00] M. Streit, J. Wolfart, *Characters and Galois invariants of regular dessins*, Revista Matemática Complutense **13** (2000), no. 1, pp. 49–81
- [SW01] M. Streit, J. Wolfart, *Cyclic Projective Planes and Wada Dessins*, Documenta Math. **6** (2001), pp. 39–68
- [Tak75] K. Takeuchi, *A characterization of arithmetic Fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), no. 4, pp. 600–612
- [Tak77a] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 1, pp. 91–106
- [Tak77b] K. Takeuchi, *Commensurability classes of arithmetic triangle groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), no. 1, pp. 201–212
- [Wol97] J. Wolfart, *The 'Obvious' Part of Belyi's Theorem and Riemann Surfaces with Many Automorphisms*, in: L. Schneps, P. Lochak (ed.), *Geometric Galois Actions 1*, LMS Lecture Notes Series 242, Cambridge U.P. (1997), pp. 97–112
- [Wol00] J. Wolfart, *Triangle groups and Jacobians of CM type*, Frankfurt a.M. (2000), <http://www.math.uni-frankfurt.de/~steuding/wolfart/jac.dvi>
- [Wol01] J. Wolfart, *Kinderzeichnungen und Uniformisierungstheorie*, Manuskript, Frankfurt a.M. (2001), <http://www.math.uni-frankfurt.de/~steuding/wolfart/kizei.dvi>
- [WS98] J. Wolfart, M. Streit, *Galois actions on some series of Riemann surfaces with many automorphisms*, Preprint, Frankfurt a.M. (1998), <http://www.math.uni-frankfurt.de/~streit/gal.dvi>

Bücher

- [Art98] M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser Verlag, Basel 1998
- [BCM01] E. Bujalance, A.F. Costa, E. Martinez, *Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups*, Cambridge University Press, Cambridge 2001
- [Bea83] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer Verlag, New York 1983
- [CM80] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1980
- [Far01] D.R. Farenick, *Algebras of Linear Transformations*, Springer Verlag, New York 2001
- [Ive92] B. Iversen, *Hyperbolic Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1992
- [Jae94] K. Jänich, *Topologie*, Springer Verlag, Berlin 1994
- [Joh01] D.L. Johnson, *Symmetries*, Springer Verlag, London 2001
- [Kat92] S. Katok, *Fuchsian groups*, The University of Chicago Press, Chicago 1992
- [KS98] H. Kurzweil, B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer Verlag, Berlin 1998

- [Leu96] A. Leutbecher, *Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1996
- [Mag74] W. Magnus, *Noneuclidean tessellations and their groups*, Academic Press, New York and London 1974
- [Mar91] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1991
- [Zim84] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart 1984

Restliche Referenzen

- [GAP] The GAP Group, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.3, 2002, Centre for Interdisciplinary Research in Computational Algebra, University of St Andrews, North Haugh, St Andrews, Fife KY16 9SS, Scotland; Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany (<http://www.gap-system.org>)