Facharbeit Mathematik
Beweis eines Satzes über algebraische Zahlen

Patrick Reichert
Georg-Cantor-Gymnasium Halle
Klasse 10_3

April 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Ich interessiere mich schon immer sehr für Mathematik. In meiner Freizeit lese ich verschiedene Bücher zu diesem Thema. Das Spektrum reicht über Sachbücher, Lehrbücher bis hin zu Büchern über die sog. *Höhere Mathematik.* Bereits in den Sommerferien 1994 fand ich im Schülerduden „Die Mathematik" (Dudenverlag, Mannheim 1991) die folgenden Textstellen:
Im Band II kann man auf Seite 27 folgende Definition lesen.

> [...] Eine reelle Zahl heißt algebraisch, wenn sie Lösung einer algebraischen Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ ist; dabei sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ganze Zahlen.

Im Band I dieses Schülerdudens steht auf Seite 505:

> c.) Transzendent heißen alle reellen Zahlen, die nicht algebraisch sind, z.B. die Zahlen [...] $\sin\ 20°$.

Diese Aussage machte mich stutzig. Meine Vermutung, daß dieses konkrete Beispiel im Hinblick auf die allgemeine Definition algebraischer Zahlen nicht korrekt ist, habe ich bereits im Oktober 1994 bestätigen können. Mein Ergebnis war, daß $\sin\ 20°$ Nullstelle des Polynoms

$$P(x) = 64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3$$

und damit nicht transzendent, sondern algebraisch ist. Somit ist die Aussage im Band I inkorrekt.

Nachdem mir diese Entdeckung gelungen war, machte ich mich an die Arbeit, weitere algebraische Sinuswerte von ganzzahligen „Gradzahlen" zu finden. Dabei entlockte ich Schritt für Schritt diesen Zahlen ihr Geheimnis. Das Ergebnis dieser Suche ist der Inhalt dieser Facharbeit. Mein Anliegen ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Wenn $\cos\ x$ algebraisch ist, dann ist $\cos(rx)$ auch algebraisch für $r \in \mathbf{Q}$.

Zur Beweisführung dieser Aussage benötige ich allerdings einen Hilfssatz. Dieser Hilfssatz besagt, daß die Summe und das Produkt zweier algebraischen Zahlen wieder algebraisch sind. Bei der Erarbeitung des Beweises bekam ich Unterstützung von Prof. Dr. G. Stroth aus dem Institut für Algebra und Geometrie an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Halle, im April 1996 Patrick Reichert

2 Definitionen und Beweis von Hilfssätzen

Zunächst benötigen wir zwei Begriffe:

(1) Eine Teilmenge $\mathbf{K}$ von $\mathbf{C}$, die gegen Addition, Multiplikation und Inversenbildung abgeschlossen ist, nennen wir einen Körper.

(2) Eine Menge $\mathbf{V}$, auf der eine Addition definiert ist, so daß gilt

 (a) $a+b=b+a$ für alle $a,b \in \mathbf{V}$

 (b) $(a+b)+c=a+(b+c)$ für alle $a,b,c \in \mathbf{V}$

 (c) $0+a=a+0=a$ für alle $a \in \mathbf{V}$ und ein $0 \in \mathbf{V}$

heißt $\mathbf{K}$-Vektorraum für einen Körper $\mathbf{K}$, falls eine Skalarmultiplikation $\lambda v, \lambda \in \mathbf{K}, v \in \mathbf{V}$ definiert ist, so daß

 (d) $\lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2$ für alle $v_1,v_2 \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbf{K}$

 (e) $(\lambda_1+\lambda_2)v=\lambda_1 v+\lambda_2 v$ für alle $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{K}, v \in \mathbf{V}$

 (f) $(\lambda_1\lambda_2)v=\lambda_1(\lambda_2 v)$ für alle $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{K}, v \in \mathbf{V}$

 (g) $1\ v=v$ für alle $v \in \mathbf{V}$

 (h) $0\ v=0$ für alle $v \in \mathbf{V}$

Beispiele:

(1) $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbf{Q}\}$ ist ein $\mathbf{Q}$ -Vektorraum (Addition und Skalarmultiplikation wie in $\mathbf{C}$)

(2) $\{(x,y) : x,y \in \mathbf{Q}\}$ ist auch $\mathbf{Q}$ -Vektorraum
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y), \lambda \in \mathbf{Q}$.

Bemerkung: Von dem Standpunkt der Strukturtheorie sind beide Vektorräume gleich.

Sei $\mathbf{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, $\mathbf{M}=\{m_1,\ldots,m_n\} \subseteq \mathbf{V}$. Dann ist nach Definition des Vektorraumes stets

$$\mathbf{W}=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i : a_i \in \mathbf{K}\right\} \subseteq \mathbf{V}.$$

Ist $\mathbf{W}=\mathbf{V}$, so nennen wir $\mathbf{M}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbf{V}$.
Im ersten Beispiel ist $\{1,\sqrt{2}\}$ ein Erzeugendensystem. Im zweiten Beispiel ist $\{(1,0),(0,1)\}$ ein Erzeugendensystem: $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$!

Sei $\mathbf{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, $\mathbf{M}=\{m_1,m_2,\ldots,m_n\} \subseteq \mathbf{V}$. Wir sagen, $\mathbf{M}$ ist *linear unabhängig*, falls aus

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i=0,\ a_i \in \mathbf{K}$$

stets $a_i=0,\ i=1,\ldots,n$ folgt. Die Darstellung der Null ist also eindeutig.

Im ersten Beispiel ist $\{1, \sqrt{2}\}$ linear unabhängig, da

$$a \cdot 1 + b\sqrt{2} = 0 \in \mathbf{C}, \;\; a, b \in \mathbf{Q}$$

natürlich a = 0, b = 0 zur Folge hat.

Im zweiten Beispiel ist $\{(1,0), (0,1)\}$ linear unabhängig:

$$(0,0) = a\ (1,0) + b\ (0,1) = (a,b).$$

Ein Erzeugendensystem, das linear unabhängig ist, nennen wir eine *Basis.*

Satz 2.1 *Sei* $\mathbf{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ *ein Erzeugendensystem des* $\mathbf{K}$*-Vektorraumes* $\mathbf{V}$*, so enthält* $\mathbf{M}$ *eine Basis.*

Beweis. Sei $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ Erzeugendensystem, $|\mathbf{N}|$ minimal. Bei geeigneter Anordnung ist $\mathbf{N} = \{m_1, \ldots, m_k\}, |\mathbf{N}| = k$.

Behauptung: $\mathbf{N}$ ist linear unabhängig. Sei

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m_i = 0.$$

Sei $a_j \neq 0$ für ein j. Dann ist

$$m_j = -a_j^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i m_i$$

Ist $v \in \mathbf{V}$, so ist

$$v = \sum_{i=1}^{k} b_i m_i$$

mit geeigneten $b_i \in \mathbf{K}$, da $\mathbf{N}$ ein Erzeugendensystem ist. Nun können wir aber m_j ersetzen:

$$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} b_i m_i + b_j \left(-a_j^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i m_i \right)$$

Also ist $\mathbf{N} - \{m_j\}$ auch ein Erzeugendensystem. Die minimale Wahl von $\mathbf{N}$ liefert einen Widerspruch. Somit ist $a_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$, d.h. $\mathbf{N}$ ist linear unabhängig. Damit ist $\mathbf{N}$ eine Basis.

Korollar 2.2 *Hat ein* $\mathbf{K}$*-Vektorraum ein endliches Erzeugendensystem, so hat er auch eine Basis.*

Im Beispiel 1 ist $\{1, \sqrt{2}\}$ eine Basis. Im zweiten Beispiel ist $\{(1,0), (0,1)\}$ eine Basis.

Satz 2.3 *Sei* $\mathbf{V}$ *ein* $\mathbf{K}$*-Vektorraum mit Basis* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *und* $\{m_1, \ldots, m_k\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge von* $\mathbf{V}$*, so ist* $k \leq n$*.*

Beweis. Sei $m_i \in \{m_1, \ldots, m_k\}$. Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis ist, ist

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

mit geeigneten $a_j \in \mathbf{K}$. Da $m_i \neq 0$ ist, gibt es ein t mit $a_t \neq 0$.
Behauptung: Dann ist $\{b_1, \ldots, b_{t-1}, m_i, b_{t+1}, \ldots, b_n\} = \mathbf{B}$ eine Basis (d.h. wir haben b_t durch m_i ersetzt).
Wir müssen zeigen, daß $\mathbf{B}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist.
(1) linear unabhängig:
Sei

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} x_j b_j + x_t m_i = 0, \ \ x_j \in \mathbf{K}.$$

Ist $x_t \neq 0$, so ist

$$m_i = -x_t^{-1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} x_j b_j \right)$$

Andererseits war

$$m_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} a_j b_j + a_t b_t, \ \ a_t \neq 0.$$

Somit ist

$$0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} (a_j + x_t^{-1} x_j) b_j + a_t b_t.$$

Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ linear unabhängig ist, ist $a_t = 0$, ein Widerspruch.
Somit ist $x_t = 0$. Also ist

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} x_j b_j = 0.$$

Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ linear unabhängig ist, ist nun $x_j = 0$, $j \neq t$. Also ist $\mathbf{B}$ linear unabhängig.

(2) $\mathbf{B}$ ist ein Erzeugendensystem:
Sei $v \in \mathbf{V}$. Dann gibt es $x_j \in \mathbf{K}$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

Es ist

$$m_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} a_j b_j + a_t b_t, \ \ a_t \neq 0.$$

Also ist

$$b_t = a_t^{-1}\left(m_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} a_j b_j\right)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} x_j b_j + x_t a_t^{-1}\left(m_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} a_j b_j\right)$$

Damit ist $\mathbf{B}$ ein Erzeugendensystem.
Nun können wir nacheinander b's aus $\{b_1, \ldots, b_n\}$ durch m's aus $\{m_1, \ldots, m_k\}$ ersetzen.
Dabei muß man aber sicherstellen, daß wirklich immer b's (und nicht in einem späteren Schritt auch m's) ersetzt werden. d.h. wir müssen zeigen:
Sei $\{m_1, \ldots, m_r, b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ eine Basis (bei geeigneter Anordnung können wir annehmen, daß die ersten r der m's die ersten r der b's ersetzen), so gibt es ein $b_j \in \{b_{r+1}, \ldots, b_n\}$, das wir durch m_{r+1} ersetzen können, d.h. bei geeigneter Anordnung ist $\{m_1, \ldots, m_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n\}$ eine Basis.
Sei

$$m_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} x_j m_j + \sum_{j=r+1}^{n} x_j b_j$$

Nach dem vorher bewiesenen Resultat genügt es zu zeigen, daß ein x_j mit $j \geq r+1$ ungleich Null ist. Sei also $x_j = 0,\ j \geq r+1$. Dann ist

$$m_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} x_j m_j$$

oder $0 = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_r m_r + (-1) m_{r+1}$.
Hier sind aber nicht alle Koeffizienten gleich Null, was der linearen Unabhängigkeit von $\{m_1, \ldots, m_k\}$ widerspricht.
Indem wir dieses Verfahren bis zu Ende fortsetzen, erhalten wir eine Basis $\{m_1, \ldots, m_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$.
Also ist $k \leq n$.

Korollar 2.4 *Seien* $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}$ *Basen des endlich erzeugten* $\mathbf{K}$*-Vektorraumes* $\mathbf{V}$*, so ist* $|\mathbf{B_1}| = |\mathbf{B_2}|$.

Beweis. Es ist $\mathbf{B_1}$ linear unabhängig. Also ist nach Satz 2.3 $|\mathbf{B_1}| \leq |\mathbf{B_2}|$.
Es ist $\mathbf{B_2}$ linear unabhängig, also ist nach Satz 2.3 $|\mathbf{B_2}| \leq |\mathbf{B_1}|$. Daraus folgt $|\mathbf{B_1}| = |\mathbf{B_2}|$.

Die Anzahl der Elemente in einer Basis nennt man die *Dimension.* Beide Vektorräume des Beispiels haben also Dimension 2.

Definition 2.5 *Sei* $\mathbf{K}$ *ein Körper,* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$*. Ein* $u \in \mathbf{C}$ *nennen wir* algebraisch *über* $\mathbf{K}$*, falls es Nullstelle eines Polynoms* $p(x)$ *ist,* $p(x) \neq 0$*:*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ \ a_i \in \mathbf{K}, a_n \neq 0$$

und

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i = 0.$$

Satz 2.6 *Summe, Produkt und Inverse algebraischer Zahlen über* $\mathbf{K}$ *sind wieder algebraisch, d.h. die algebraischen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. $\mathbf{K(u)}$ bezeichne die folgende Teilmenge von $\mathbf{C}$:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n_j} b_i u^i : b_i \in \mathbf{K}, \ n_j \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\}.$$

$\mathbf{K(u)}$ ist also die Menge aller Linearkombinationen der Potenzen von u mit Koeffizienten in $\mathbf{K}$. Offenbar ist $\mathbf{K(u)}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, da Summen von Linearkombinationen und Vielfache von Linearkombinationen wieder Linearkombinationen sind.
Nun wissen wir, daß

$$a_n u^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i = 0$$

ist. Da $a_n \neq 0$ ist, gilt

$$u^n = -a_n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i.$$

Somit ist u^n und dann auch jede größere Potenz u^k durch $1, u, \ldots, u^{n-1}$ ausdrückbar.
Das bedeutet, daß $\{1, u, \ldots, u^{n-1}\}$ ein Erzeugendensystem ist.

Als nächstes zeigen wir:

Lemma 2.7 *Ist* $\mathbf{K}$ *ein Körper,* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}$ *ein endlich dimensionaler* $\mathbf{K}$*-Vektorraum, der gegen Multiplikation abgeschlossen ist – also* $v, w \in \mathbf{V}$*, so ist* $vw \in \mathbf{V}$*– so ist jedes* $v \in \mathbf{V}$ *algebraisch über* $\mathbf{K}$*.*

Beweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von $\mathbf{V}$ und $v \in \mathbf{V}$. Sei r maximal mit $\{1, v, \ldots, v^{r-1}\}$ ist linear unabhängig. Nach Satz 2.3 ist $r \leq m$. Also ist $\{1, v, \ldots, v^r\}$ nicht linear unabhängig.
Es gibt somit $c_0, \ldots, c_r \in \mathbf{K}$, nicht alle c_i gleich Null, mit

$$c_0 + c_1 v + \cdots + c_r v^r = 0.$$

Setze

$$q(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i,$$

so ist v Nullstelle von q, d.h. v ist algebraisch über $\mathbf{K}$.

Nach Lemma 2.7 ist jedes $v \in \mathbf{K}(\mathbf{u})$ algebraisch über $\mathbf{K}$. Sei $v \in \mathbf{K}(\mathbf{u}), v \neq 0$. Dann gibt es ein Polynom

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$$

mit $q(v) = 0$.
Also ist $c_m v^m + \cdots + c_1 v + c_0 = 0$.
Wir können $c_0 \neq 0$ annehmen, da wir sonst in $\mathbf{C}$ durch v dividieren könnten.
Also ist $c_m v^{m-1} + \cdots + c_1 = -c_0 v^{-1}$.
Somit ist $v^{-1} \in \mathbf{K}(\mathbf{u})$, da $v, \ldots, v^{m-1} \in \mathbf{K}(\mathbf{u})$ ist.

Wir haben gezeigt:

Lemma 2.8 $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ *ist ein Körper, falls u algebraisch über $\mathbf{K}$ ist, weiter ist $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ ein endlich dimensionaler $\mathbf{K}$-Vektorraum.*

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis.
Seien u, v gegeben, beide algebraisch über $\mathbf{K}$. Seien

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \;\; q(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$$

Polynome mit $a_i, c_i \in \mathbf{K}$ und $p(u) = 0 = q(v)$.

Nach Lemma 2.8 ist $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ ein Körper mit $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{u})$. Also ist v auch algebraisch über $\mathbf{K}(\mathbf{u})$.
Nach Lemma 2.8 ist $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ ein endlich dimensionaler $\mathbf{K}(\mathbf{u})$-Vektorraum (wir haben oben einfach $\mathbf{K}$ durch $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ ersetzt).
Wir zeigen nun, daß $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ ein endlich dimensionaler $\mathbf{K}$-Vektorraum ist. Dazu wiederholen wir die Definitionen:

$$\begin{aligned} K(u)(v) &= \left\{ \sum_{i=0}^{n_k} x_i v^i : x_i \in \mathbf{K}(\mathbf{u}), n_k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\} \\ K(u) &= \left\{ \sum_{i=0}^{n_k} y_i u^i : y_i \in \mathbf{K}, n_k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Da aber $\{1, \ldots, u^{n-1}\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ war und entsprechend $\{1, \ldots, v^{m-1}\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ als $\mathbf{K}(\mathbf{u})$-Vektorraum ist, können wir nun wie folgt argumentieren.

Sei $w \in \mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$. Dann gibt es $x_i \in \mathbf{K}(\mathbf{u})$ mit

$$w = \sum_{i=0}^{m-1} x_i v^i.$$

Da $x_i \in \mathbf{K}(\mathbf{u})$ ist, gibt es für jedes i Elemente $y_{ij} \in \mathbf{K}$ mit

$$x_i = \sum_{j=0}^{n-1} y_{ij} u^j.$$

Also ist

$$w = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_{ij} u^j \right) v^i = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} y_{ij} u^j v^i, \ y_{ij} \in \mathbf{K}.$$

Also ist $\{u^i v^j : 0 \leq i \leq n-1, \ 0 \leq j \leq m-1\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ als $\mathbf{K}$-Vektorraum.
Damit ist $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ endlich dimensional nach Satz 2.1.
Nach Lemma 2.8 ist $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ ein Körper, also multiplikativ abgeschlossen.
Nach Lemma 2.7 ist jedes Element aus $\mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ algebraisch über $\mathbf{K}$.
Es sind $u + v$ und $uv \in \mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$!

Es folgen nun eine Reihe von Hilfssätzen, die später benötigt werden.

Lemma 2.9 *Für jedes $n \in \mathbf{N}$ existiert ein Polynom g_n, für das*

$$g_n(\cos x) = \cos(nx)$$

gilt.

Beweis. Aus der Moivreschen Formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

erhält man mit Hilfe des binomischen Satzes

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

die Beziehung:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\varphi \ i^k \sin^k \varphi = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Daraus erhält man

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \sin^{2k}\varphi &= (1 - \cos^2\varphi)^k \\ \sin^{2k}\varphi &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m \cos^{2m}\varphi \end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{2k} \binom{k}{m} (-1)^{k+m} \cos^{n-2k+2m}\varphi$$

Setzt man nun

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{2k} \binom{k}{m} (-1)^{k+m} x^{n-2k+2m},$$

gilt $g_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Hierbei ist g_n offensichtlich eine Polynom.

Lemma 2.10 *Ist* $\cos x$ *algebraisch, dann ist* $\cos(x/n)$ *ebenfalls algebraisch für jedes* $n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$.

Beweis: Da $\cos x = \cos(-x)$ gilt, kann man von $n > 0$, d.h. n ist natürlich, ausgehen.
Da nach Voraussetzung $\cos x$ algebraisch ist, existiert ein Polynom f, für das

$$f(\cos x) = 0$$

gilt.
Nach Lemma 2.9 existiert für jedes natürliche n ein Polynom g_n, für das

$$g_n(\cos x) = \cos nx$$

gilt.
Daraus folgt:

$$g_n(\cos(x/n)) = \cos x.$$

Weiter folgt daraus:

$$\begin{aligned} f(g_n(\cos(x/n))) &= f(\cos x) \\ f(g_n(\cos(x/n))) &= 0. \end{aligned}$$

Sei h die Funktion, die man bei Verkettung der Polynome f und g_n erhält:

$$h(x) := f(g_n(x)).$$

Dann ist h ebenfalls ein Polynom. Man erhält also:

$$h(\cos(x/n)) = 0.$$

Damit ist $\cos(x/n)$ algebraisch.

Lemma 2.11 *Wenn c algebraisch ist, dann ist* $\sqrt{c}$ *ebenfalls algebraisch.*

Beweis. Da c algebraisch ist, existiert ein Polynom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

so daß

$$p(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = 0$$

gilt. Nun ist $\sqrt{c}$ Lösung von folgender algebraischen Gleichung:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} = 0, \ da \ \sum_{i=0}^{n} a_i (\sqrt{c})^{2i} = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = 0$$

Somit ist $\sqrt{c}$ algebraisch.

Lemma 2.12 *Wenn* $\cos x$ *algebraisch ist, dann ist auch* $\sin x$ *algebraisch.*

Beweis. Da $\cos x$ algebraisch ist, ist nach Satz 2.6 $(\cos x)(\cos x) = \cos^2 x$ algebraisch.
Da 1 algebraisch ist, ist nach Satz 2.6 dann $(1 - \cos^2 x)$ algebraisch.
Nach Lemma 2.11 ist dann $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x$ algebraisch.

Lemma 2.13 *Wenn* $\cos x$ *algebraisch ist, dann ist* $\cos(kx)$ *auch algebraisch für jedes* $k \in \mathbf{Z}$*.*

Beweis. Man kann $k > 0$ voraussetzen, da $\cos x = \cos(-x)$ gilt. (Für $k = 0$ gilt die Behauptung ohnehin.)
Der Beweis wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt.
Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt die Behauptung, denn $\cos x$ ist nach Voraussetzung algebraisch.
Induktionsvoraussetzung: $\cos kx$ ist algebraisch.
Induktionsbehauptung: $\cos(k+1)x$ ist algebraisch.
Induktionsbeweis:

$$\cos(kx + x) = \cos kx \cos x - \sin kx \sin x$$

Nun gilt:

(1) $\cos kx$ ist nach Induktionsvoraussetzung algebraisch.

(2) $\cos x$ ist nach Voraussetzung algebraisch.

(3) $\sin kx$ ist nach Lemma 2.12 algebraisch, da $\cos kx$ nach (1) algebraisch ist.

(4) $\sin x$ ist nach Lemma 2.12 algebraisch, da $\cos x$ nach (2) algebraisch ist.

(5) Nach Satz 2.6 ist $\cos kx \cos x$ algebraisch, da nach (1) bzw. (2) $\cos kx$ bzw. $\cos x$ algebraisch ist.

(6) Nach Satz 2.6 ist $\sin kx \sin x$ algebraisch, da nach (3) bzw. (4) $\sin kx$ bzw. $\sin x$ algebraisch ist. Demnach ist natürlich auch $(-\sin kx \sin x)$ algebraisch.

(7) Nach Satz 2.6 ist $\cos kx \cos x - \sin kx \sin x = \cos(k+1)x$ algebraisch, da nach (5) bzw. (6) die Summanden dieser Summe algebraisch sind.

3 Beweis des Haupt-Satzes

Satz 3.1 *Wenn* $\cos x$ *algebraisch ist, dann ist* $\cos(rx)$ *auch algebraisch für* $r \in \mathbf{Q}$*.*

Beweis. Jede rationale Zahl r läßt sich als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen.
Sei $r = p/q$ mit $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$.
Nach Lemma 2.13 ist dann $\cos(px)$ algebraisch.
Nach Lemma 2.10 ist dann $\cos[(px)/q] = \cos[(p/q)x] = \cos(rx)$ algebraisch.

4 Anhang: Literaturverzeichnis

1. „Schülerduden: Die Mathematik I“, 5. Auflage, Mannheim 1990
2. „Schülerduden: Die Mathematik II“, 3. Auflage, Mannheim 1991
3. Siegfried Bosch: „Algebra“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993