Grundlagen der Vektoranalysis

Patrick Reichert

Mai 1998

Zusammenfassung

Dieser Artikel stellt grundlegende Aspekte der Vektoranalysis dar. Insbesondere werden skalare Felder und Vektorfelder, weiterhin der Gradient, die Divergenz sowie die Rotation eines Vektorfeldes betrachtet. Dabei wurde bewußt auf eine einfache mathematische Ausdrucksweise und eine einprägsame äußere Form geachtet.

Da die Vektoranalysis viele Anwendungen in der theoretischen Physik besitzt, wurde versucht, alle mathematischen Begriffe durch physikalische Sachverhalte zu verdeutlichen. Ausführlich durchgerechnete Beispiele runden den Artikel ab.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Die Vektoranalysis stellt mathematische Modelle bereit, die es erlauben, Vektoren als Funktionen von Veränderlichen zu betrachten und mittels Methoden der Differential- und Integralrechnung zu untersuchen. Zu den Grundlagen dieser mathematischen Disziplin, die oft auch als *Feldtheorie* bezeichnet wird, gehören somit sowohl Begriffe aus der analytischen Geometrie als auch aus der Differentialrechnung.

1.1 Vektoren

Einen Vektor nennt man jedes Element eines Vektorraumes. Die in der analytischen Geometrie des Raumes vorkommenden Vektoren sind Translationen des Raumes, die nach Festlegung eines Koordinatensystems als Tripel reeller Zahlen aufgefaßt werden können.

Im folgenden wird von einem kartesischen Koordinatensystem ausgegangen, somit läßt sich jeder Vektor des Raumes $\mathbf{R}^3$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k},$$

wobei $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ als *Einheitsvektoren* bezeichnet werden.

1.2 Funktionen von zwei Veränderlichen

Bei Funktionen von zwei Veränderlichen unterscheidet man vier analytische Darstellungsformen.

1. Funktionsgleichung in der *expliziten* (entwickelten) Form

   $$z = f(x, y)$$

2. Relationsgleichung in der *impliziten* (unentwickelten) Form

   $$F(x, y, z) = 0$$

3. System von drei Funktionsgleichungen in der *Parameterform*

   $$\begin{aligned} x &= f_x(\varphi, \psi) \\ y &= f_y(\varphi, \psi) \\ z &= f_z(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

   Jede der drei Variablen x, y, z wird dabei zu einer Funktion der zwei Parameter φ, ψ, welche als die unabhängigen Veränderlichen zu betrachten sind.

4. Die *vektorielle Darstellungsform* erhält man aus der Parameterform, wenn man die Tatsache benutzt, daß jeder Punkt $P(x, y, z)$ des Raumes eindeutig einen Vektor definiert, dessen Anfangspunkt im Ursprung O liegt und dessen Spitze mit P zusammenfällt (*Ortsvektor* $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$).

   $$\vec{r}(\varphi, \psi) = f_x(\varphi, \psi)\ \vec{i} + f_y(\varphi, \psi)\ \vec{j} + f_z(\varphi, \psi)\ \vec{k}$$

Beispiel. Vorgelegt sei die Mittelpunktsgleichung einer Kugel[1] vom Radius r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Die explizite Funktionsgleichung lautet demnach

$$z = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\ -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Die Aufspaltung in zwei Teilfunktionen ist hier notwendig, da die Eindeutigkeit der Zuordnung $z = f(x, y)$ gefordert ist. Geometrisch erhält man zwei Kugelhalbflächen. Die implizite Form lautet

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

und eine Parameterform ist

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rcl} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\pi \leq \psi < \pi \end{array}$$

Zum Beweis ihrer Richtigkeit werden die Parameter wie folgt eliminiert

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\cos^2\psi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\psi \\ &= r^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \end{aligned}$$

man erhält also wieder die Mittelpunktsgleichung.

Aus der obigen Paramterdarstellung ist die Vektorgleichung der Kugel sofort angebbar.

$$\vec{r}(\varphi, \psi) = (r\cos\varphi\cos\psi)\,\vec{i} + (r\sin\varphi\cos\psi)\,\vec{j} + (r\sin\psi)\,\vec{k}$$

Läuft φ von 0 bis 2π und unabhängig davon ψ von $-\pi$ bis π, so überstreicht die Vektorspitze von $\vec{r}(\varphi, \psi)$ die gesamte Kugeloberfläche.

1.3 Raumkurven

Der nichtleere Durchschnitt zweier Raumflächen heißt *Raumkurve.* Haben die Flächen die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

so liegt ein Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ genau dann auf der Raumkurve, wenn seine Koordinaten sowohl die Gleichung $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ als auch die Gleichung $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ erfüllen. Das heißt aber, daß das Gleichungssystem (1) eine Darstellung der Raumkurve ist. Setzt man x als Funktion eines Parameters t

$$x = x(t)$$

in die beiden Flächengleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} F(x(t), y, z) &= 0 \\ G(x(t), y, z) &= 0, \end{aligned}$$

[1] Gemeint ist damit stets die *Kugelfläche*, nicht etwa die massive Kugel

also ein Gleichungssystem, mit dem man (unter gewissen Voraussetzungen) y und z als Funktionen von t ausdrücken kann. Insgesamt erhält man also folgende *Parameterform* der Raumkurve.

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

In vektorieller Form lautet die Gleichung der Raumkurve also

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}.$$

In dieser Form wird die Raumkurve auch als *Vektorfunktion* der skalaren Veränderlichen t bezeichnet.

1.4 Partielle Ableitungen

Die Differentialrechnung bei Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen wird grundsätzlich zurückgeführt auf die der Funktionen einer Veränderlichen, indem man jeweils nur nach einer Veränderlichen ableitet und die andere Veränderliche konstant hält. Sämtliche Ableitungsregeln bleiben dabei bestehen, lediglich die Bezeichnungsweisen sind etwas anders.

Definition. Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

heißt *partielle Ableitung* bzw. *partieller Differentialquotient* der expliziten Funktion $z = f(x,y)$ nach x.

Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

heißt *partielle Ableitung* bzw. *partieller Differentialquotient* der expliziten Funktion $z = f(x,y)$ nach y.

Formal wird die partielle Ableitung nach x wie die gewöhnliche Ableitung nach x ausgeführt, nur wird beim Ableiten y wie eine Konstante behandelt. Entsprechend ist bei der partiellen Ableitung nach y die Variable x wie eine Konstante zu behandeln. Das geschwungene ∂ weist ausdrücklich auf partielle Differentation hin.

Beispiel. Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$, man bestimme die partiellen Ableitungen nach x und nach y. Man erhält

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - xy^3 - \sqrt{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y^3 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -3xy^2 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \end{aligned}$$

1.5 Ableitungen von Vektorfunktionen

Gegeben sei eine Vektorfunktion der skalaren Veränderlichen t

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k} \tag{2}$$

mit den orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ in Richtung der drei Koordinatenachsen. Bildet man den Differenzenvektor

$$\begin{aligned}\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) &= [x(t+h) - x(t)]\ \vec{i} + [y(t+h) - y(t)]\ \vec{j} + \\ &\quad [z(t+h) - z(t)]\ \vec{k}\end{aligned}$$

und anschließend den Grenzwert des vektoriellen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\ \vec{i} + \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\ \vec{j} + \\ &\quad \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}\ \vec{k},\end{aligned}$$

so schreibt man im Falle der Existenz der drei Grenzwerte dafür

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\ \vec{i} + \dot{y}(t)\ \vec{j} + \dot{z}(t)\ \vec{k}.$$

Anschaulich hat $\dot{\vec{r}}(t)$ die Richtung der Tangente an die Raumkurve (2). Analog erhält man für die zweite Ableitung der Vektorfunktion

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\ \vec{i} + \ddot{y}(t)\ \vec{j} + \ddot{z}(t)\ \vec{k}.$$

Anwendungen in der Physik. Deutet man den Parameter t als Zeit, so stellt $\vec{r} = \vec{r}(t)$ die *Vektorgleichung* für die Bahn eines bewegten Objektes im Raum dar. Jedem Wert von t wird ein Raumpunkt eindeutig zugeordnet. Hierbei spielen die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung eine besondere Rolle.

Definition. Die Ableitung der Bahn

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$$

nach der Zeit

$$\vec{v}(t) := \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

heißt *Geschwindigkeitsvektor*, sein Betrag

$$|\vec{v}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

wird *Bahngeschwindigkeit* genannt.

Definition. Die zweite Ableitung der Bahn

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$$

nach der Zeit

$$\vec{a}(t) := \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

heißt *Beschleunigungsvektor*, sein Betrag

$$|\vec{a}(t)| = |\ddot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2}$$

wird *Bahnbeschleunigung* genannt.

2 Vektoranalysis

2.1 Skalare Felder

Definition. Ein *skalares Feld* ist eine Funktion, die jedem Punkt P eines Teilbereiches $\mathbf{G}$ des Raumes eine skalare Größe, d.h. eine Zahl, zuordnet. Andere Bezeichnungen sind *Ortsfunktion* und *Potentialfunktion*.

Beispiele sind das Temperaturfeld oder das Dichtefeld in einem inhomogenen Medium.

Ist ein skalares Feld nur für die Punkte einer Ebene definiert, so heißt es auch *ebenes skalares Feld*.

Das skalare Feld bezeichnet man als *zentrales Feld* oder *Kugelfeld* bzgl. P_0, wenn der Wert der skalaren Größe U im Punkt P nur vom Abstand der Punkte P und P_0 abhängt. Das skalare Feld $U(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ der Beleuchtungsstärke bei einer punktförmigen Lichtquelle in $P_0(0,0,0)$ ist beispielsweise ein zentrales Feld bzgl. P_0.

Das skalare Feld heißt *axiales* oder *zylindrisches Feld*, wenn U für alle Punkte gleiche Werte annimmt, die von einer Geraden, die man als *Feldachse* bezeichnet, gleiche Abstände haben.

Die folgende Übersicht faßt die unterschiedlichen Schreibweisen für skalare Felder zusammen.

Verwendetes Koordinatensystem	Schreibweise	Anwendung
Kartesische Koordinaten	$U = f(x,y,z)$	beliebige Felder
Zylinderkoordinaten	$U = f(r,\varphi,z)$	axiale Felder
Kugelkoordinaten	$U = f(r,\varphi,\psi)$	Zentralfelder

Definition. Alle Punkte P von $\mathbf{G}$, für die U stets den gleichen Wert c hat, bilden für das skalare Feld eine *Niveaufläche* und für ein ebenes Feld eine *Niveaulinie*. Die Gleichung der Niveaufläche hat die Form $f(x,y,z) = c$, $f(r,\varphi,z) = c$ oder $f(r,\varphi,\psi) = c$. Für verschiedene Werte von c ergeben sich verschiedene Niveauflächen. Durch jeden Punkt von $\mathbf{G}$ geht genau eine Niveaufläche hindurch.

In geographischen Karten sind z.B. die Linien gleicher Höhe über dem Meeresspiegel oder die Linien gleicher Temperatur Niveaulinien. Die Niveauflächen eines Zentralfeldes bzgl. P_0 sind konzentrische Kugeln um P_0 und die Niveauflächen eines axialen Feldes sind Zylinder mit der Feldachse als Zylinderachse.

Beispiel. Gegeben sei das skalare Feld

$$U(x,y,z) = 6x^2 + 3y^2 + 2z^2,$$

gesucht ist die Niveaufläche für ein beliebiges $c \in \mathbf{R}$. Man erhält

$$\begin{aligned} 6x^2 + 3y^2 + 2z^2 &= c \\ \frac{x^2}{\frac{c}{6}} + \frac{y^2}{\frac{c}{3}} + \frac{z^2}{\frac{c}{2}} &= 1, \end{aligned}$$

also die Gleichung eines Ellipsoides für $c > 0$, für $c = 0$ schrumpft die Niveaufläche auf den Punkt $P(0,0,0)$ zusammen, und für $c < 0$ gibt es keine Niveauflächen.

2.2 Vektorfelder

Definition. Ein *Vektorfeld* ist eine Funktion, die jedem Punkt P eines Teilbereiches $\mathbf{G}$ des Raumes einen Vektor zuordnet, dafür wird folgende Schreibweise verwendet:

$$\vec{V}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\ \vec{i} + v_y(x,y,z)\ \vec{j} + v_z(x,y,z)\ \vec{k},$$

dabei sind v_x, v_y und v_z skalare Felder.

Beispiele für Vektorfelder sind das Geschwindigkeitfeld der Teilchen einer strömenden Flüssigkeit oder ein Kraftfeld.

Ist das Vektorfeld nur für die Punkte einer Ebene definiert und liegen die vektoriellen Größen $\vec{V}(P)$ auch in dieser Ebene, so bezeichnet man das Vektorfeld auch *ebenes Vektorfeld.* Ein Vektorfeld heißt *zentrales Vektorfeld*, wenn alle Vektoren $\vec{V}(P)$ auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt P_0, das Zentrum, gehen. Ein zentrales Vektorfeld besitzt die Darstellung

$$\vec{V}(\vec{r}) = f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ mit } \vec{r} = \overrightarrow{P_0P}.$$

Hängt $f(\vec{r})$ nur von $|\vec{r}|$ ab, so spricht man von einem sphärischen Vektorfeld $\vec{V} = f(r)(\vec{r}/r)$ mit $r = |\vec{r}|$. Beispielsweise sind das *Newtonsche Gravitationfeld* und das *Coulombfeld* $\vec{V} = (c/r^2)(\vec{r}/r)$ sphärische Vektorfelder.

Definition. Ein *veränderliches Vektorfeld* ist ein Vektorfeld, das zusätzlich zum Raumpunkt P auch noch von der Zeit t abhängt. Es besitzt folgende Form:

$$\vec{V}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\ \vec{i} + v(x,y,z,t)\ \vec{j} + w(x,y,z,t)\ \vec{k}.$$

Die partielle Ableitung eines Vektorfeldes nach x wird definiert durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{V}(x+h,y,z,t)-\vec{V}(x,y,z,t)}{h} \\
\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\ \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\ \vec{k}
\end{aligned}$$

Analog verfährt man für die partiellen Ableitungen von $\vec{V}$ nach y, z und t.

Beispiel. Nach dem Coulombschen Gesetz gilt für die Kraft, mit der sich zwei entgegengesetzte Ladungen Q_1 und Q_2 anziehen

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Faßt man die Konstanten zusammen, so erhält man ein Vektorfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{c}{r^3}\vec{r} \text{ mit } c = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

Befindet sich die Ladung Q_1 im Ursprung, so gilt

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Somit erhält man für das Vektorfeld $\vec{F}$ und die partielle Ableitung nach x folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= \frac{c}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{r} = \frac{c}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})\\
\vec{F}(\vec{r}) &= \frac{cx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{i}+\frac{cy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{j}+\frac{cz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{k}\\
\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} &= -\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{i}-\frac{3cxy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{j}-\frac{3cxz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{k}
\end{aligned}$$

2.3 Gradient eines skalaren Feldes

Definition. Der *Gradient* grad U eines skalaren Feldes $U(x,y,z)$ bzw. $U(\vec{r})$ ist das Vektorfeld, das jedem Punkt des skalaren Feldes U einen Vektor in Richtung größter Funktionszunahme zuordnet, der senkrecht auf den Niveauflächen steht. Dem skalaren Feld $U(\vec{r})$ wird das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \text{grad}\; U(\vec{r})$$

zugeordnet (gilt nicht umgekehrt). In kartesischen Koordinaten gilt somit

$$\text{grad}\; U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{k}.$$

Der Definitionsbereich $D(\text{grad}\; U)$ wird gebildet durch alle Punkte $\vec{r}$ des Raumes, in denen $U(\vec{r})$ differenzierbar ist.

Der Gradient besitzt stets die Richtung der Normalen an die Niveaufläche und geht durch den gegebenen Punkt. Seine Richung fällt mit der des schnellsten Anwachsens der Funktion $U(x,y,z)$ zusammen, und sein Betrag gibt die Geschwindigkeit dieses Anwachsens an.

Definition. Der *Hamiltonsche Operator* ∇ (sprich: nabla[2]) bezeichnet den folgenden symbolischen Vektor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}.$$

Rechnet man mit ∇ wie mit einem Vektor, so kann man den Gradienten eines skalaren Feldes U unter Benutzung des Skalarproduktes folgendermaßen ausdrücken:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{k} = \text{grad}\; U.$$

Beispiel. Gegeben sei das skalare Feld

$$U(x,y,z) = 6x^2+3y^2-2xz^2,$$

gesucht ist ein allgemeiner Ausdruck für den Gradienten grad $U(x,y,z)$ in einem beliebigen Punkt $P(x,y,z)$ und der konkrete Vektor im Punkt $P_0(1,-1,4)$.

[2] *Nabla* ist ein hebräisches Wort und bezeichnet ein Harfeninstrument von der Form ∇.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U(x,y,z) &= \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\,\vec{k} \\
&= \frac{\partial(6x^2+3y^2-2xz^2)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial(6x^2+3y^2-2xz^2)}{\partial y}\,\vec{j} + \\
&\quad \frac{\partial(6x^2+3y^2-2xz^2)}{\partial z}\,\vec{k} \\
\operatorname{grad} U(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 12x-2z^2 \\ 6y \\ -4xz \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\operatorname{grad} U(1,-1,4) = \begin{pmatrix} -20 \\ -6 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

2.4 Richtungsableitung eines skalaren Feldes

Definition. Die Änderung, die ein skalares Feld $U(\vec{r})$ in eine beliebige Richtung $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ erfährt, nennt man die *Richtungsableitung* der Funktion U in Richtung von $\vec{c}$ im Punkt $\vec{r}$.
Man erhält als Änderung der Funktion $U(\vec{r})$ in Richtung $\vec{c}$

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{c}} = \lim_{h\to 0} \frac{U(\vec{r}+h\,\vec{c}) - U(\vec{r})}{h} = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}\,c_x + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}\,c_y + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\,c_z,$$

diese läßt sich als Skalarprodukt $\operatorname{grad} U \cdot \vec{c}$ auffassen. Ist $\vec{c}^{\,0} = \vec{c}/|\vec{c}\,|$ der zu $\vec{c}$ gehörige Einheitsvektor, so gibt

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{c}^{\,0}} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{c}^{\,0} = |\operatorname{grad} U| \cos \angle(\operatorname{grad} U, \vec{c}^{\,0})$$

die *Geschwindigkeit* an, mit der die Funktion U in Richtung von $\vec{c}^{\,0}$ im Punkt $\vec{r}$ wächst. Daher ist $|\operatorname{grad} U|$ um so größer, je dichter in der Umgebung des Punktes $\vec{r}$ die Niveauflächen $U = c_0,\ U = c_0 + h,\ U = c_0 + 2h,\ \ldots$ liegen. In den Punkten, in denen U ein relatives Maximum oder Minimum hat, arten die Niveauflächen zu einem Punkt aus, und es gilt in diesen Punkten $\operatorname{grad} U = 0$.

Ergebnis. Die Richtungsableitung des skalaren Feldes U in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{c}^{\,0}$ im Punkt $\vec{r}$ ist

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{c}^{\,0}} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{c}^{\,0}.$$

Beispiel. Gegeben sei das skalare Feld aus dem letzten Beispiel, von dem der Gradient schon berechnet wurde.

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= 6x^2 + 3y^2 - 2xz^2 \\
\operatorname{grad} U(x,y,z) &= (12x - 2z^2)\,\vec{i} + 6y\,\vec{j} - 4xz\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Gesucht ist die Richtungsableitung dieses skalaren Feldes in Richtung des Einheitsvektors $\vec{c}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}$ im Punkt $P(1,-1,4)$, $r = \overrightarrow{OP}$.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{c}^0} &= \text{grad } U \cdot \vec{c}^0 \\
&= \begin{pmatrix} -20 \\ -6 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(-20 + 6 - 16) \\
\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{c}^0} &= -\frac{30}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

2.5 Divergenz eines Vektorfeldes

Definition. Ist im kartesischen Koordinatensystem das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = u(x,y,z)\ \vec{i} + v(x,y,z)\ \vec{j} + w(x,y,z)\ \vec{k}$$

gegeben, so nennt man das skalare Feld

$$\text{div } \vec{V} = U(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \vec{V}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$.

Physikalische Deutung der Divergenz. Deutet man $\vec{V}(x,y,z)$ als Geschwindigkeitsfeld einer stationären strömenden Flüssigkeit mit der Dichte $\varrho = \varrho(x,y,z)$, d.h. mit einer Strömung, die nicht explizit von der Zeit abhängt, so ergibt sich folgende anschauliche Bedeutung der Divergenz: Die x-Komponente $u\ \vec{i}$ von $\vec{V}$ gibt den in der Zeiteinheit von einem Flüssigkeitsteilchen zurückgelegten Weg an. Denkt man sich ein quaderförmiges Volumenelement mit achsenparallelen Kanten, so tritt durch die senkrecht zur x-Achse stehenden Seitenfläche $\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ in der Zeiteinheit das Flüssigkeitsvolumen $u\ \mathrm{d}A_1 = u\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ und damit die Masse $\varrho\ u\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ in das Volumenelement ein. Bezeichnet man für $x + dx$ die senkrecht zur x-Achse stehende Seitenfläche des Volumenelements mit $\mathrm{d}A_2$, so tritt durch die Fläche $\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ die Masse

$$\varrho(x+dx,y,z)\ u(x+dx,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \left[\varrho\ u(x,y,z) + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

wieder aus. Die Differenz

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

ergibt den Masseverlust durch die Flächen $\mathrm{d}A_1$ und $\mathrm{d}A_2$. Wenn man die anderen Flächenpaare ebenso berücksichtigt, erhält man den gesamten Masseverlust des Volumenelements:

$$\left(\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \text{div } (\varrho\vec{V})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

Die Divergenz gibt somit den Masseverlust in der Volumen- und Zeiteinheit an, deshalb bezeichnet man sie oft auch als *Ergiebigkeit*.

Fließt ebensoviel Masse zu wie ab, so ist div $\vec{V} = 0$, das Vektorfeld heißt in diesen Punkten *quellenfrei.* Punkte des Vektorfeldes $\vec{V}$ mit div $\vec{V} > 0$ heißen *Quellen* und solche mit div $\vec{V} < 0$ *Senken.*

Das folgende Raumintegral bezeichnet die *Ergiebigkeit* der im Körper K enthaltenen Quellen.

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{V} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Ergebnis. Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{V}(P)$ ist ein skalares Feld, das die Dichte der Quellen in jedem Punkt angibt.

Man unterscheidet folgende Punkte des Vektorfeldes:

$$\operatorname{div} \vec{V} \begin{cases} < 0 & \text{Senken} \\ = 0 & \text{quellenfreies Feld} \\ > 0 & \text{Quellen} \end{cases}$$

Beispiel 1. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Für die Divergenz dieses Vektorfeldes erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\operatorname{div} \vec{V} &= \frac{\partial x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial y} + \\
&\quad \frac{\partial z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial z} \\
&= (-2x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + \\
&\quad (x^2 - 2y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + \\
&\quad (x^2 + y^2 - 2z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
&= (0x^2 + 0y^2 + 0z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\
\operatorname{div} \vec{V} &= 0
\end{aligned}$$

Somit ist dieses Vektorfeld in ganz $\mathbf{R}^3$ quellenfrei.

Beispiel 2. Auch Verknüpfungen der Divergenz und des Gradienten sind möglich, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \operatorname{grad} (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \operatorname{div} \left(\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} \,\vec{i} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y} \,\vec{j} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z} \,\vec{k} \right) \\
&= \operatorname{div} (2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}) \\
&= \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z} \\
&= 6
\end{aligned}$$

2.6 Rotation eines Vektorfeldes

Definition. Ist das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z) = u(x,y,z)\ \vec{i} + v(x,y,z)\ \vec{j} + w(x,y,z)\ \vec{k}$$

gegeben, so bezeichnet man das Vektorfeld

$$\vec{R}(x,y,z) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

als *Rotation* des Vektorfeldes $\vec{V}(x,y,z)$ und schreibt dafür

$$\vec{R} = \text{rot}\ \vec{V}.$$

Unter Benutzung des symbolischen Hamiltonoperators kann man die Rotation eines Vektorfeldes auch mittels des Kreuzproduktes ausdrücken:

$$\text{rot}\ \vec{V} = \nabla \times \vec{V}.$$

Beispiel. Das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\ \vec{i} + (\mathrm{e}^x + z)\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$$

besitzt die Rotation

$$\begin{aligned}
\text{rot}\ \vec{V} &= \left(\frac{\partial(2)}{\partial y} - \frac{\partial(\mathrm{e}^x + z)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(2xy)}{\partial z} - \frac{\partial(2)}{\partial x}\right)\vec{j} + \\
&\quad \left(\frac{\partial(\mathrm{e}^x + z)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (0-1)\ \vec{i} + (0-0)\ \vec{j} + (\mathrm{e}^x - 2x)\ \vec{k} \\
\text{rot}\ \vec{V} &= -\vec{i} + (\mathrm{e}^x - 2x)\ \vec{k}
\end{aligned}$$

2.7 Konservative Vektorfelder

Im Abschnitt 2.3 wurde mit Hilfe des Gradienten einem skalaren Feld $U(\vec{r})$ ein Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \text{grad}\ U(\vec{r})$$

zugeordnet. Umgekehrt existiert aber nicht zu jedem Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ ein skalares Feld $U(\vec{r})$ mit $\vec{V} = \text{grad}\ U$.

Definition. Vektorfelder $\vec{V}$, die die Eigenschaft haben, daß es ein skalares Feld $U(\vec{r})$ mit $\vec{V} = \text{grad}\ U$ gibt, heißen *konservativ*. $\vec{V}$ bezeichnet man dann als *Potentialvektor* und die Funktion U als *Potential* des Vektorfeldes $\vec{V}$. Das Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Ein gegebenes Vektorfeld $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ hat in einer Teilmenge G von $\mathbf{R}^3$ dann und nur dann ein Potential U, wenn alle ersten partiellen Ableitungen von $\vec{V}$ stetig sind und die folgenden *Integrabilitätsbedingungen* in G erfüllt sind.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Diese Integrabilitätsbedingungen sind äquivalent zu der Bedingung

$$\text{rot } \vec{V} = 0,$$

die besagt, daß das Vektorfeld $\vec{V}$ *wirbelfrei* ist. Wirbelfreie Vektorfelder sind also stets konservativ.

Das Potential U läßt sich mit Hilfe des folgenden Kurvenintegrals berechnen, das über einen beliebigen Weg, der P_0 und P verbindet, erstreckt wird.

$$U(P) = \int_{P_0 P} u \text{ d}x + v \text{ d}y + w \text{ d}z$$

Ergebnis. Ein Vektorfeld heißt *konservativ*, wenn das Integral

$$\int_A^B \vec{V} \text{ d}\vec{r}$$

unabhängig vom Weg $A \to B$ ist. Jedes Gradientenfeld ist konservativ. Für das Kurvenintegral gilt dann ($\vec{r}_A \leq \vec{r} \leq \vec{r}_B$):

$$\int_r \vec{V} \text{ d}\vec{r} = \int_{AB} u \text{ d}x + v \text{ d}y + w \text{ d}z = \int_{AB} \text{d}U = U(B) - U(A)$$

Beispiel. Das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

ist wirbelfrei, denn

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{V}(\vec{r}) &= \text{rot } \frac{\vec{r}}{r^3} \\
&= \text{rot } \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \left(\frac{\partial z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial y} - \frac{\partial y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial z} \right) \vec{i} + \\
&\quad \left(\frac{\partial x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial z} - \frac{\partial z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial x} \right) \vec{j} + \\
&\quad \left(\frac{\partial y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial x} - \frac{\partial x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial y} \right) \vec{k} \\
&= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\text{rot } \vec{V}(\vec{r}) &= 0.
\end{aligned}$$

Dieses Vektorfeld ist in der Tat konservativ, denn mit

$$U = -\frac{1}{r}$$

gilt

$$\text{grad } U = \vec{V}.$$

2.8 Zusammenfassung

Die folgende Tabelle fäßt die drei betrachteten vektoranalytischen Operationen übersichtlich zusammen.

Operation	Feld	Ergebnis	Symbol
Gradient	Skalares Feld U	Vektorfeld grad U	∇U
Divergenz	Vektorfeld $\vec{V}$	Skalares Feld div $\vec{V}$	$\nabla \vec{V}$
Rotation	Vektorfeld $\vec{V}$	Vektorfeld rot $\vec{V}$	$\nabla \times \vec{V}$

Die folgenden Betrachtungen stellen weitere Begriffe der Vektoranalysis vor, sie sollen hier aber nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden, eine ausführliche Behandlung ist nicht vorgesehen.

Laplace-Operator. Führt man die Skalarmultiplikation des symbolischen Hamilton-Operators mit sich selbst aus, so erhält man den Laplace-Operator.

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Wendet man den Laplace-Operators auf beliebige skalare oder Vektorfelder an, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \nabla^2 U = \text{div grad } U \\
\Delta \vec{V} &= \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V} \\
\text{div rot } \vec{V} &= \nabla(\nabla \times \vec{V}) \\
\text{rot grad } U &= \nabla \times (\nabla U) \\
\text{rot rot } \vec{V} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \vec{V}) - \Delta \vec{V}
\end{aligned}$$

Besondere Felder. Die folgende Tabelle fäßt wichtige Felder zusammen.

div rot $\vec{V} = 0$	quellenfreies Rotorfeld
rot grad $U = 0$	wirbelfreies Gradientenfeld z.B. $\vec{E} = $ grad U(Feldstärke)

Im quellenfreien Raum gilt die Laplace-Gleichung: div grad $U = \Delta U = 0$.
Im quellenbehafteten Raum gilt die Poisson-Gleichung: div grad $U = \Delta U = \rho$ mit der *Quellendichte* $\rho = \rho(x, y, z)$.

Literatur

[1] Bartsch: *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag Leipzig–Köln, 1994

[2] Böhme: *Analysis 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990

[3] Gellert, Kästner, Neuber: *Lexikon der Mathematik*, VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1990

[4] Kusmin, Günther: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik 1*, Verlag Harri Deutsch, 1993

[5] Scheid: *Schülerduden: Die Mathematik II*, Dudenverlag Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1991